MỘT MÔ HÌNH BÀI TOÁN HAI CHIỀU CHO DÒNG CHẢY TRÊN CÁC LÒNG DẪN HỞ BỀ MẶT TỰ DO

KS Nguyễn Hải Bắc

TS. Vũ Hữu Hải

Abstract:

This article present a mathematical model of open channel flow using 2D Navier – Stockes equation; some popular solving methods used in mathematical model and example that apply the mathematical model and the finite element method of the unstatedy flow, free surface through the spillway.

Tóm tắt : Bài báo này trình bày một mô hình toán cho dòng chảy trên các lòng dẫn hở bằng phương trình 2D Navier-Stokes; một số phương pháp giải phổ biến sử dụng cho mô hình toán và ví dụ áp dụng mô hình toán với phương pháp phần tử hữu hạn cho dòng chảy không ổn định, bề mặt tự do qua đập tràn.

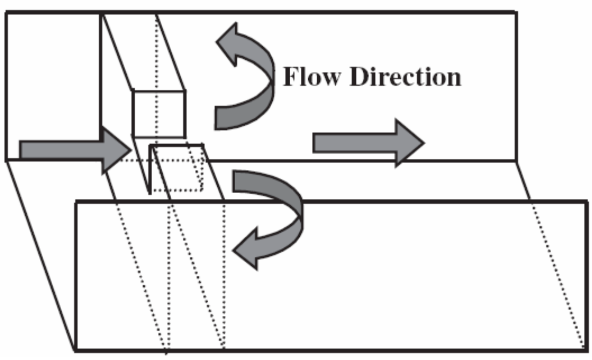
Đặt vấn đề:

Nghiên cứu dòng chảy trong các lòng dẫn hở (open channel flow) là một bài toán thường gặp trong việc thiết kế và xây dựng các công trình thủy lợi-thủy điện. Ở Việt Nam cũng như các nước khác trên thế giới có nền khoa học kỹ thuật tiên tiến, mặc dù có rất nhiều công trình nghiên cứu về vấn đề này nhưng cho đến nay vẫn còn nhiều vấn đề nghiên cứu về dòng chảy nói chung và dòng chảy trong lòng dẫn hở nói riêng vẫn chưa giải quyết thỏa đáng. Trên thế giới hiện nay việc nghiên cứu dòng chảy được thông qua hai loại mô hình chính đó là: mô hình vật lý (physical model) và mô hình toán (mathematical model). Mô hình vật lý với ưu điểm dễ xây dựng, phản ánh được rõ ràng bản chất vật lý của dòng chảy trong mọi bài toán cụ thể nên đã trở thành công cụ không thể thiếu trong các nghiên cứu về dòng chảy, tuy nhiên mô hình vật lý gắn liền với nhiều khó khăn về đồng dạng của mô hình, về vật liệu và về thiết bị đo. Để khắc phục khó khăn đó các nghiên cứu đang đi vào xây dựng các mô hình toán có thể giải quyết được các bài toán tổng quát, phản ánh được quy luật của dòng chảy giúp cho quá trình nghiên cứu không còn giới hạn về không gian và thời gian. Với lý do đó việc nghiên cứu và triển khai xây dựng mô hình toán kết hợp với mô hình vật lý cho dòng chảy nhằm giải quyết những vấn đề đã và đang đặt ra hiện nay là hết sức cần thiết.

Một trong những vấn đề kinh điển được đặt ra là các bài toán dòng chảy trong các lòng dẫn tự nhiên hoặc nhân tạo được dùng để dự đoán và phân tích trạng thái dòng chảy, sự thay đổi lưu lượng và sóng lũ trên các lưu vực sông và các kênh nhân tạo. Đây là một vấn đề rất rộng cả về lý thuyết cũng như thực nghiệm do đó trong phạm vi bài báo này chúng tôi tập trung vào việc xây dựng mô hình toán dòng chảy trên lưu vực sông qua phương trình Navier-Stokes bài toán hai chiều và một phương pháp giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

Nội dung chính:

Lựa chọn mô hình:



Trạng thái dòng chảy trên lưu vực sông chịu ảnh hưởng rất lớn khi có các công trình và kết cấu như đập tràn, tường chắn, đường đắp, mố trụ được xây dựng chắn ngang dòng chảy. Vận tốc dòng chảy sẽ thay đổi rất nhanh khi tiến đến gần các công trình nói trên do mặt cắt ngang của dòng chảy bị thay đổi đột ngột.

Ví dụ với trường hợp trên hình vẽ dưới đây, dòng chảy qua một đoạn tường chắn có đoạn khe hẹp sau đó mở rộng sẽ đập thẳng vào hai bên tường biên và đáy với vận tốc thay đổi rất lớn. Sau đoạn mở rộng dòng chảy sẽ tạo thành những xoáy nước lớn theo cả phương ngang và phương đứng là nguyên nhân dẫn đến việc xói và bào mòn kết cấu công trình cũng như đáy sông. Trong trường hợp này một mô hình toán ba chiều sẽ biểu diễn được toàn bộ trạng thái của dòng chảy và là mục đích của các nghiên cứu về dòng chảy không ổn định trong lòng dẫn hở.

Tuy nhiên để áp dụng mô hình toán ba chiều gặp phải khó khăn rất lớn. Một trong những khó khăn đó là giải hệ phương trình phi tuyến Navier-Stokes không gian 3 chiều. Việc giải bằng các phương pháp gần đúng phụ thuộc vào biến đổi của lưu lượng dòng chảy do sự thay đổi quá nhanh của mặt cắt ngang, phụ thuộc tỷ lệ dọc theo chiều dòng chảy và mặt cắt ngang là rất lớn khiến cho vùng tính toán phải chia thành quá nhiều lưới nhỏ sẽ là trở ngại lớn cho việc giải bằng các phương pháp số. Tất nhiên hoàn toàn có thể giải quyết vấn đề này bằng các phương pháp toán học hiện đại cùng với sự hỗ trợ của máy tính, nhưng mô hình sẽ phức tạp và việc áp dụng cho các vùng tính toán sẽ khó khăn.

Với các dòng chảy trong lòng dẫn hở trong một số điều kiện phù hợp có thể chọn giải pháp thay thế cho dòng chảy ba chiều bằng dòng một chiều tại những tuyến dòng chảy thẳng, thay đổi dần hoặc bằng mô hình hai chiều theo phương đứng và phương dòng chảy hoặc mô hình hai chiều bình diện đối với dòng chảy qua lòng dẫn có nền bằng phẳng.

Trong bài báo này chúng tôi lựa chọn mô hình toán hai chiều theo phương dòng chảy và phương thẳng đứng, đây là mô hình phổ biến trên thế giới đã áp dụng hiệu quả cho nhiều bài toán phức tạp.

Nội dung mô hình:

Dòng chảy trên lưu vực sông được mô tả bởi phương trình hai chiều Navier-Stokes. Phương trình này được sử dụng để tính cao độ mặt nước và thành phần vận tốc theo phương ngang của dòng chảy bề mặt tự do trong cả hai trạng thái: dòng ổn định và không ổn định. Phương trình này còn hay được gọi là "phương trình nước nông".

1. Phương trình toán:

a. Phương trình liên tục hai chiều:

$$\frac{\partial \rho Z_w}{\partial t} + \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} = \rho q_A \qquad (NS1)$$

Trong đó:

ρ: tỷ trọng của nước (kg m^{-3})

Z_w: cao độ mặt nước

$Z_w = h + Z_b$

h: chiều sâu cột nước (m)

Z_b: cao độ đáy

$q_x = v_x h$ và $q_y = v_y h$ lưu lượng đơn vị theo phương x và phương y (m^2 s^{-1})

v_x và v_y là vận tốc theo phương x và phương y

q_A là lưu lượng đơn vị (m^3 m^{-2} s^{-1})

b. Phương trình động lượng:

Phương trình động lượng theo phương x và phương y có dạng như sau:

$$\frac{\partial \rho q_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\beta\frac{q_x{}^2}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\beta\frac{q_x q_y}{h}\right)+\rho gh\frac{\partial Z_w}{\partial x}+h\frac{\partial P_a}{\partial x}+\rho ghS_{fx}-\rho f_C q_x$$
$$-\tau_{wx}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho K_L\frac{\partial q_x}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho K_T\frac{\partial q_x}{\partial y}\right)=0 \qquad \text{(NS2)}$$

$$\frac{\partial \rho q_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\beta\frac{q_y{}^2}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\beta\frac{q_x q_y}{h}\right)+\rho gh\frac{\partial Z_w}{\partial y}+h\frac{\partial P_a}{\partial y}+\rho ghS_{fy}+\rho f_C q_y$$
$$-\tau_{wy}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho K_L\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho K_T\frac{\partial q_y}{\partial x}\right)=0 \qquad \text{(NS3)}$$

Trong đó:

β: hệ số động lượng kể đến sự thay đổi vận tốc theo phương đứng (1-1.1)

g: gia tốc trọng trường (m s^{-2})

P_a: áp suất không khí (N m^{-2})

$f_{C:}$ tham số Coriolis (-)

S_{fx} và S_{fy} (m m^{-1}) là ma sát do chuyển dịch

τ_{wx} và τ_{wx} là ứng suất bề mặt gây ra bởi gió theo phương x và phương y (N m^{-2})

K_L and K_T : độ nhớt chất lỏng theo phương dọc và phương ngang (m^2 s^{-1})

Các thành phần trong phương trình (NS2) theo phương x đó là:

- Thứ nhất: biến thiên động lượng theo thời gian
- Thứ hai: biến thiên động lượng theo phương x
- Thứ ba: biến thiên động lượng theo phương y
- Thứ tư: ảnh hưởng của độ dốc mặt nước theo phương x
- Thứ năm: ảnh hưởng của áp suất theo phương x
- Thứ sáu: thành phần nhám của đáy theo phương x
- Thứ bảy; ảnh hưởng của lực Coriolis
- Thứ tám: ảnh hưởng của gió theo phương x
- Thứ chín: sự truyền động lượng theo phương dọc
- Thứ mười: sự truyền động lượng theo phương ngang

c. Thành phần ma sát do trượt

Ma sát do trượt trong phương trình động lượng được tính qua công thức Manning:

$$S_{fx}=\frac{n^2 q_x\sqrt{q_x^2+q_y^2}}{h^{10/3}} \qquad S_{fy}=\frac{n^2 q_y\sqrt{q_x^2+q_y^2}}{h^{10/3}} \qquad \text{(NS-4)}$$

Trong đó n gọi là hệ số Manning.

d. Tính toán ảnh hưởng của gió

Thành phần ứng suất bề mặt theo một hướng τ_{wx} and τ_{wy} sinh ra bởi gió được tính toán như sau:

www.vncold.vn

$$\tau_{wx} = c_s \rho_a W^2 \cos(\psi) \qquad \tau_{wy} = c_s \rho_a W^2 \sin(\psi) \qquad \text{(NS-5)}$$

Trong đó:

c_s là hệ số ứng suất bề mặt

$$c_s = \begin{cases} 10^{-3} c_{s1} & ; khi\ W \le W_{\min} \\ [c_{s1} + c_{s2}(W - W_{\min})] * 10^{-3} & ; khi\ W > W_{\min} \end{cases}$$

c_{s1}, c_{s2} và W_{min} là các hệ số. Ví dụ tốc độ gió được đo là 10 m/s c_{s1}=1.0, c_{s2}=0.067 và W_{min}=4m/s

ρ_a: tỷ trọng của không khí (kg m^{-3})

W: tốc độ tiến gần của gió với bề mặt nước

ψ: góc giữa hướng gió và chiều dương trục x

e. Tính toán ảnh hưởng của lực Coriolis

Ảnh hưởng do chuyển động quay của trái đất đối với chuyển động của dòng chảy được kể tới trong tham số Coriolis $f_C = 2\omega\sin\phi$ trong đó ω là vận tốc góc của trái đất (=7.27x10^{-5} rad/s), ϕ là góc so với xích đạo. Hầu hết với dòng chảy có tỷ lệ giữa chiều ngang và chiều sâu lớn (dòng chảy trên sông và lũ đồng bằng) ảnh hưởng của lực Coriolis rất nhỏ và có thể bỏ qua.

f. Mô hình rối (dòng chảy hỗn loạn)

Sự truyền đông lượng của chất lỏng do sự thay đổi khối lượng chất lỏng chuyển động tại các tốc độ khác nhau được gọi là sự thay đổi hỗn loạn. Nó được tính gần đúng trong phương trình bằng cách nhân các hệ số rối K_L và K_T với đạo hàm thứ hai của vận tốc theo phương x và phương y. Do khó để xác định giá trị cho các hệ số rối nên nó được lấy tương tự theo các điều kiện vật lý nơi mà sự rối phụ thuộc vào động lượng chất lỏng và khoảng cách hiệu quả của động lượng, tính bởi thương của vận tốc chất lỏng và diện tích bề mặt của phần tử. Vì thế khi số phần tử tăng K_L và K_T sẽ tăng hoặc khi vận tốc tăng K_L và K_T sẽ tăng.

$$Pe = \frac{ud_L}{K_L} \quad ; K_L = \frac{ud_L}{Pe} \qquad \text{(NS-6)}$$

Pe: gọi là số Peclet có giá trị trong khoảng 15-40

u: vận tốc trung bình của lưới (m/s)

d_L: là chiều dài lưới theo hướng dòng chảy (m)

K_L: hệ số thay đổi động lượng theo phương dọc (m^2 s^{-1})

K_T=(0.3-0.7)K_L

g. Hai tham số đặc trưng của dòng chảy

- Số Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{ud_L}{\mu}$$

- Số Froude:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gd_L}}$$

Trong đó:

μ: hệ số nhớt động của dòng chảy

U: vận tốc dòng chảy

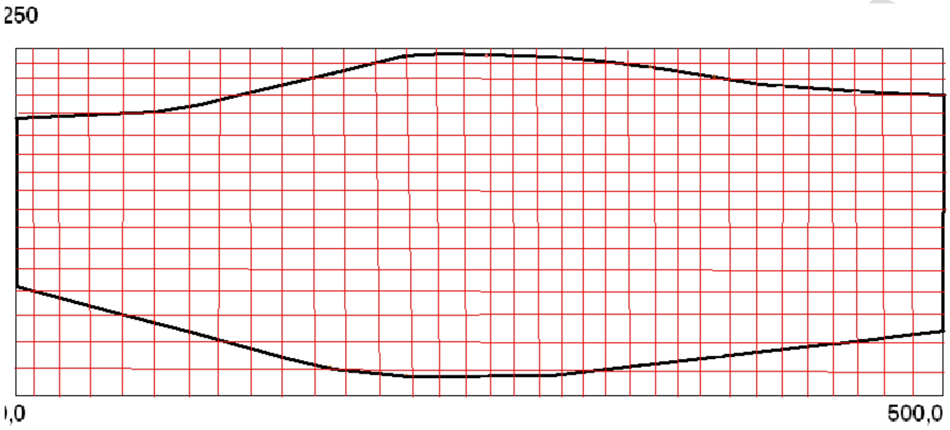
g: gia tốc trọng trường

2. Một số phương pháp giải phương trình Navier-Stokes hai chiều

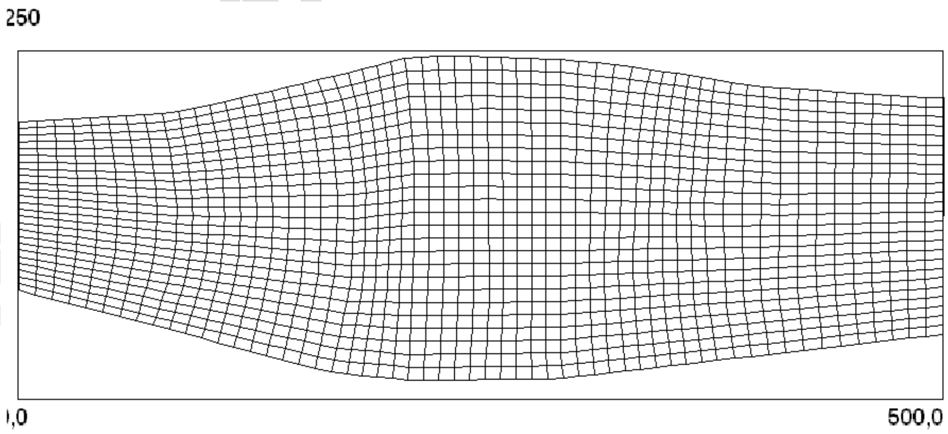
Có ba phương pháp được sử dụng phổ biến khi giải phương trình hai chiều và ba chiều Navier-Stokes là: sai phân hữu hạn (finite difference method - FDM), thể tích hữu hạn (finite volume method - FVM) và phần tử hữu hạn (finite element method - FEM)

a. Phương pháp sai phân hữu hạn

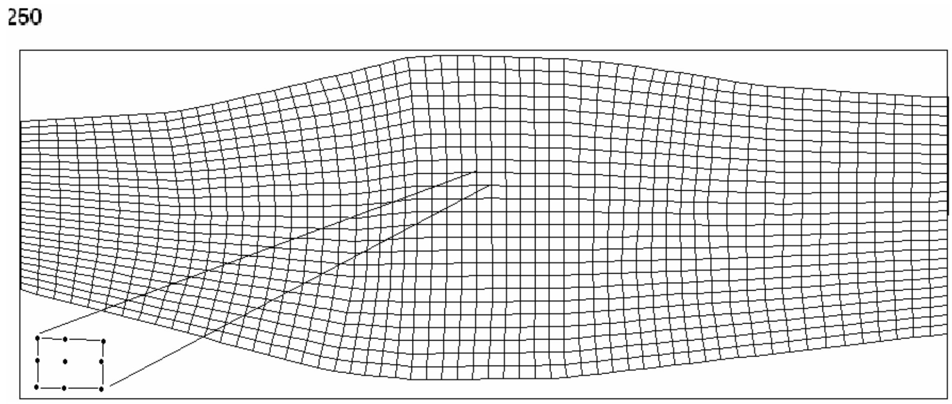
Theo phương pháp này miền tính toán sẽ được chia thành lưới chữ nhật (grid cell) có kích thước 1 cell là $\Delta x_{i,j}$ và $\Delta y_{i,j.}$ Với cách chia này sẽ có những phần sai khác với miền tính toán (phần diện tích ngoài vùng biên) do đó sẽ phải loại bỏ chúng trong quá trình tính toán (ví dụ bằng cách đặt vận tốc = 0 cho tất cả những cell đó)



b. Phương pháp thể tích hữu hạn
Phương pháp này sử dụng các cell và phần tử (element) nằm hoàn toàn trong miền tính toán. Ý tưởng của FVM là tính toán mực nước tại điểm giữa mỗi cell, thông lượng (flux) và vận tốc được tính toán tại biên. Thể tích cần kiểm soát là thể tích của mỗi cell, cân bằng khối lượng và động lượng cũng được tính toán cho tất cả các cell. Trong trường hợp miền tính toán phức tạp như hồ, cửa sông FEM trở nên mềm dẻo hơn.



c. Phương pháp phần tử hữu hạn
Cũng như phương pháp FVM FEM sử dụng các cell và phần tử nằm trong miền tính toán. Mỗi phần tử chứa một vài nút, thông thường số nút trên mỗi phần tử là 3,6 (phần tử tam giác) 8 (các góc và điểm giữa mỗi cạnh của tứ giác) hoặc 9 (cộng thêm điểm giữa mỗi phần tử). Trong FEM mực nước và vận tốc đều được tính toán trên tất cả các điểm như nhau.



3. Giải phương trình Navier-Stokes hai chiều bằng phương pháp phần tử hữu hạn

3.1 Công thức phần tử hữu hạn cho bài toán

Giải phương trình Navier-Stokes cho dòng không ổn định dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn (FE) trong một không gian thời gian. Để xây dựng không gian hàm FE trên một không gian thời gian chúng ta chia khoảng thời gian (0,T) thành các đoạn nhỏ $I_n=(t_n,t_{n+1})$ trong đó $0=t_0<t_1<\ldots>t_n=T$. Trong một miền tính toán $\Omega_n \subset R^2$ với Γ_n là biên đặt $\Omega_n=\Omega_t^2$, $\Gamma_n=\Gamma_{tn}$. Định nghĩa không gian thời gian thu hẹp Q_n như một không gian bao bởi bề mặt Ω_n, Ω_{n+1} và P_n, trong đó P_n là bề mặt được mô tả bởi biên Γ_t trong đoạn thời gian I_n.

Cho mỗi không gian Qn định nghĩa không gian lời giải ((S_u^h)$_n$ và không gian hàm cho vận tốc $(\nu_u^h)_n$ và áp suất $(\nu_p^h)_n$

$$(S_u^h)_n = \{u^h \mid u^h \in \left[H^{1h}(Q_n)\right]^2, u^h = g^h \text{ trên } (Pn)g$$

$$(\nu_u^h)_n = \{w^h \mid w^h \in \left[H^{1h}(Q_{n)})\right]^2, w^h = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

$$(S_p^h)_n = (\nu_p^h)_n = \{p^h \mid p^h \in H^{1h}(Q_n)\}$$

Trong đó:

$H^{1h}(Q_n)$ là không gian hàm hữu hạn chiều xây dựng trên toàn bộ Q_n bằng cách lấy đa thức bậc 1 trong cả không gian và thời gian. Không gian hàm nội suy thì liên tục trong không gian nhưng không liên tục theo thời gian.

Với những định nghĩa trên công thức cân bằng cho dạng tổng quát của phương trình Navier-Stokes như sau:

$$\int_{Q_n} w^h.\rho\left(\frac{\partial u^h}{\partial t}+u^h.\nabla u^h - f\right)dQ + \int_{Q_n}\varepsilon(w^h):\sigma(u^h,p^h)dQ + \int_{Q_n} q^h\nabla.u^h dQ + \int_{\Omega_n}(w^h)_n^+.\rho((u^h)_n^+ - (u^h)_n^-)d\Omega$$
$$+\sum_{e=1}^{(n_{el})_n}\int_{Q_n^e}\frac{1}{\rho}\left[\rho\left(\frac{\partial w^h}{\partial t}+u^h.\nabla w^h\right)-\nabla.\sigma(w^h,q^h)\right].\left[\rho\left(\frac{\partial u^h}{\partial t}+u^h.\nabla u^h - f\right)-\nabla.\sigma(u^h,p^h)\right]dQ \qquad (3\text{-}2)$$
$$+\sum_{e=1}^{(n_{el})_n}\int_{Q_n^e}\nabla w^h\rho\nabla.u^h dQ = \int_{(P_n)_h} w^h h^h dP$$

Trong đó:

www.vncold.vn

$$(u^h)_n^{\pm} = \lim_{\varepsilon \to 0} u(t_n \pm \varepsilon)$$

$$\int_{Q_n} ....dQ = \int_{I_n} \int_{\Omega_t^h} ....d\Omega dt$$

$$\int_{P_n} ....dP = \int_{I_n} \int_{\Gamma_t^h} ....d\Gamma dt$$

Lời giải của phương trình (3-2) sử dụng cho toàn bộ không gian co hẹp $Q_0, Q_1, \ldots Q_{n-1}$ một cách tuần tự và tính toán bắt đầu với:

$$(u^h)_0^- = u_0^h$$

Phương trình (3-2) là hệ phương trình phi tuyến và được giải bằng phương pháp lặp Newton-Raphson.

3.2 Vấn đề biên tự do

a. Phương trình mô tả của biên tự do (free surface) như sau:

z=H(x,t)

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u_s \frac{\partial H}{\partial x} - w_s = 0 \text{ trên S } \forall t \in (0,T) \quad (3\text{-}3)$$

Công thức phần tử hữu hạn cho phương trình (3-3) như sau:

$$\int \psi^h \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u_s^h - w_s^h \right) dS + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S^e} \tau_{DC} \left(\frac{\partial \psi^h \partial H^h}{\partial x \partial x} \right) dS + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S^e} \tau_{SUPG} u_s^h \frac{\partial \psi^h}{\partial x} \left(\frac{\partial H^h}{\partial t} + u_s^h \frac{\partial H^h}{\partial x} - w_s^h \right) dS = 0 \quad (3\text{-}4)$$

Trong đó:

$$\tau_{DC} = C h_s^2 r(H^h)$$

$$r(H) = \frac{\left| \dfrac{\partial H}{\partial t} + u_s^h \dfrac{\partial H}{\partial x} - w_s^h \right|}{\max H - \min H}$$

$\tau_{SUPG} = \dfrac{h_s}{2|u_s|}$, h_s: là chiều dài của phần tử

Phương trình (3-4) cũng là một hệ phương trình phi tuyến và được giải bằng phương pháp Newton-Raphson.

b. Phương pháp thay đổi - cập nhật lưới (mesh update method)

Đối với vấn đề biên tự do lưới tính toán sẽ được biến đổi và cập nhật lại trong tính toán. Có hai cách thay đổi đó là: thay đổi các nút lưới và sinh lai lưới tính toán với tập hợp nút và phần tử mới. Sự thay đổi các nút sẽ được bắt buộc cho điều kiện biên phù hợp với chuyển động của bề mặt tự do. Trong đó sự chuyển động tự do được xác định tại mỗi bước lặp của việc giải phương trình (3-4).

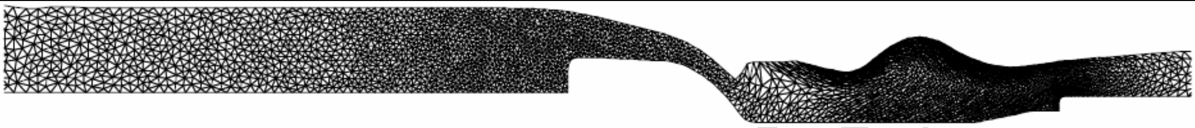
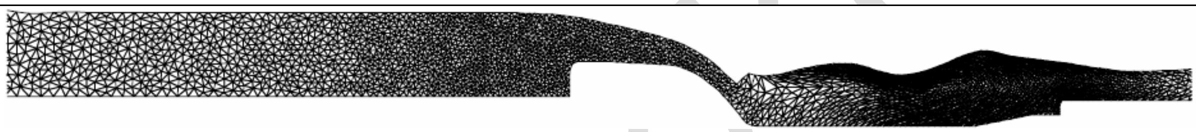
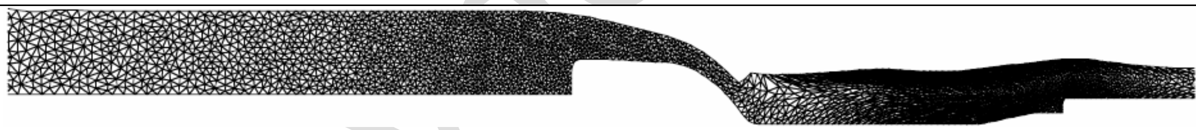
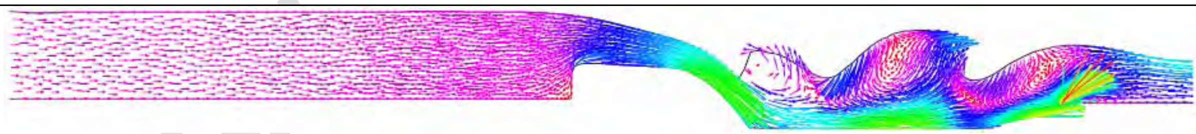
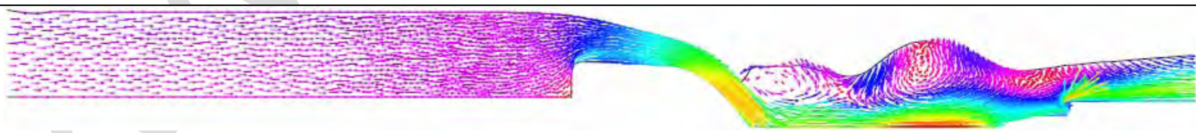
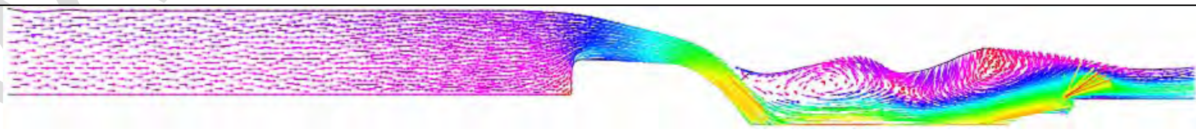
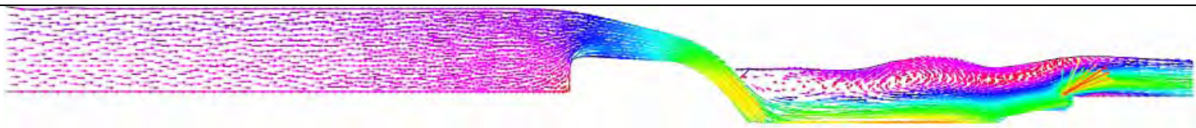
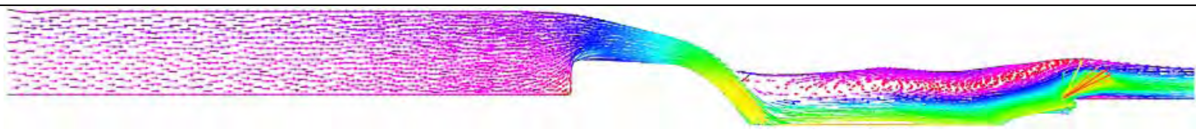
Mỗi một vị trí của bề mặt tự do được biết chúng ta giải phương trình bằng phương pháp phần tử hữu hạn như trên để xác định chuyển vị của nút lưới. Sau đó chúng ta có thể sử dụng phương pháp tự động thay đổi lưới hoặc kết hợp với phương pháp tự động sinh lại lưới để thể hiện kết quả tính toán theo các bước thời gian của bề mặt biên tự do. Đây là một kỹ thuật khó đòi hỏi sự hỗ trợ rất nhiều của máy tính và kiến thức về cấu trúc lưới, kỹ thuật này được thể hiện trong ví dụ áp dụng dưới đây.

4. Ví dụ áp dụng

Áp dụng mô hình hai chiều bằng phương pháp phần tử hữu han cho việc tính toán dòng chảy qua đập tràn như sau:

- Miền tính toán được chia thành 7966 nút, 7571 phần tử tam giác
- Mặt nước ban đầu là mặt phẳng
- Tham số đặc trưng dòng chảy: $Re=7x10^6$, $Fr=0.217$
- Thời gian tính toán là 185 bước thời gian, mỗi bước là 0.1s

Kết quả tính toán thể hiện trong bảng dưới đây:

Thời gian t	**Dạng lưới**
t=25s	
t=35s	
t=45s	
t=55s	
t=65s	
	Biểu diễn vận tốc
t=25s	
t=35s	
t=45s	
t=55s	
t=65s	

5. Kết luận

Dòng chảy trong các lòng dẫn hở là bài toán thông thường gặp phổ biến trong thực tế. Nhưng việc xác định trạng thái dòng chảy và tính toán các thông số dòng chảy là vấn đề phức tạp không thể giải bằng giải tích. Vì vậy việc áp dụng một mô hình toán hai chiều để giải quyết mang lại kết quả phù hợp với thực tế và phương pháp giải gọn gàng là hết sức cần thiết và hiệu quả.

Với mô hình này chúng ta có thể giải quyết tương đối chính xác các bài toán dòng chảy trên các lưu vực sông, cửa sông ven biển, các bài toán dòng chảy qua các công trình thuỷ lợi thuỷ điện, bài toán sóng vỡ đập hai chiều…

Tuy nhiên trong nhiều trường hợp điều kiện biên phức tạp, trạng thái dòng chảy thay đổi lớn theo nhiều chiều phải xây dựng mô hình ba chiều mới có thể giải quyết được vấn đề một cách phù hợp. Các tác giả sẽ trình bày việc xây dựng mô hình toán ba chiều trên cơ sở giải phương trình 3D Navier-Stokes bằng một số phương pháp như: phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp phần tử biên trong thời gian tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Ven Te Chow - *Open Chanel Hydraulíc*, McGraw-Hill Book Company, Japan, Tokyo 1983.

[2] M. Hanif Chaudhry, *Open Chanel Flow*, PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey 1993.

[3] Vũ Hữu Hải, *Sử dụng một mô hình sai phân hiện để giai bài toán dòng chảy hai chiều không ổn định* – Tuyển tập công trình khoa học số 3-1995- Trường Đại học Xây dựng.

[4] Vũ Hữu Hải, *Một mô hình thuỷ lực dòng xiết hai chiều bình diện trên dốc nước có thành bên thay dổi* - Tuyển tập công trình khoa học số 1-1997- Trường Đại học Xây dựng.

[5] Vũ Hữu Hải, *Chế độ dòng xiết hai chiều bình diện có thành bên thay dổi* – Luận án phó tiến sĩ KHKT, Đại học xây dựng Hà nội, 1997

[6]. Nguyễn Chiến, *Tính toán thủy lực các kết cấu để điều khiển dòng xiết trong công trình xả nước*, Sách giảng dạy cao học, Đại học thủy lợi Hà nội, 1997.

www.vncold.vn