Chương 1
TOÁN HỌC

1.1. TOÁN SƠ CẤP

1.1.1. Đại số và l ợng giác

1.1.1.1. Các công thức kết hợp - Nhị thức Niu tơn

1. Hoán vị (không lặp) của n phần tử phân biệt ($n \in N$)

(Kí hiệu: $n \in N \Leftrightarrow$ n là một số nguyên, dương hoặc bằng 0).

a) Định nghĩa

Mỗi cách xếp (không lặp) n phần tử phân biệt thành dãy có thứ tự cho ta một hoán vị của n phần tử đó. Ví dụ: (5, 3,1, 2, 4) là một hoán vị của 5 số tự nhiên đầu tiên.

b) Số hoán vị của n phần tử phân biệt

$$P_n = n(n-1)(n-2)...1 = n! \qquad (1.1.1)$$

(n! đọc là *giai thừa n* hoặc *n giai thừa*. Số này bằng tích của n số tự nhiên đầu tiên).

Ví dụ: Số hoán vị của 5 số tự nhiên đầu tiên là:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Như vậy, sẽ có 120 cách xếp 5 phần tử thành dãy có thứ tự.

c) Quy ước tính

$$0! = 1.$$

2. Chỉnh hợp (không lặp) chập k của n phần tử phân biệt ($0 \le k \le n;\ n, k \in N$)

a) Định nghĩa

Mỗi cách xếp (không lặp) k trong n phần tử phân biệt thành dãy có thứ tự cho ta một chỉnh hợp chập k của n phần tử đó. Ví dụ: (5, 3, 1) là một chỉnh hợp chập 3 của 5 số tự nhiên đầu tiên.

b) Số chỉnh hợp chập k của n phần tử phân biệt

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \qquad (1.1.2)$$

Ví dụ: Số chỉnh hợp chập 3 của 5 số tự nhiên đầu tiên là $5 \times 4 \times 3 = 60$. Như vậy, từ 5 số tự nhiên đầu tiên, có thể lập được 60 số phân biệt gồm 3 chữ số khác nhau đôi một.

c) Số chỉnh hợp chập n của n phần tử phân biệt chính là số hoán vị của n phần tử đó:

$$A_n^n = P_n .$$

3. Tổ hợp (không lặp) chập k của n phần tử phân biệt ($0 \le k \le n$; $n, k \in N$)

a) Định nghĩa

Mỗi tập con (không lặp) gồm k trong n phần tử phân biệt cho ta một tổ hợp chập k của n phần tử đó. Ví dụ: Tập ba số 5, 3, 1 *không kể thứ tự* là một tổ hợp chập 3 của 5 số tự nhiên đầu tiên.

b) Số tổ hợp chập k của n phần tử phân biệt

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!} \qquad (1.1.3)$$

Ví dụ: Số tổ hợp chập 3 của 5 số tự nhiên đầu tiên là $\frac{60}{3!} = 10$. Như vậy từ 5 số tự nhiên đầu tiên, có thể lập được 10 tập con, để mỗi tập gồm 3 chữ số khác nhau đôi một.

c) Số chỉnh hợp chập k của n phần tử phân biệt gấp (k!) lần số tổ hợp chập k của n phần tử đó.

4. Chỉnh hợp (cho phép lặp) chập k của n phần tử phân biệt ($n, k \in N$)

a) Định nghĩa

Mỗi cách xếp (cho phép lặp) k phần tử, rút từ n phần tử phân biệt, thành dãy có thứ tự cho ta một *chỉnh hợp lặp* chập k của n phần tử đó. Ví dụ: (5, 3, 3) là một chỉnh hợp lặp chập 3 của 5 số tự nhiên đầu tiên. Một dãy 16 số 0, số 1 là một chỉnh hợp lặp chập 16 của hai số này.

b) Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử phân biệt

$$L_n^k = n^k \qquad (1.1.4)$$

Ví dụ: Số chỉnh hợp lặp chập 5 của 3 số tự nhiên đầu tiên là $3^5 = 243$. Như vậy, từ 3 chữ số 1, 2, 3 có thể lập được 243 dãy số, để mỗi dãy gồm 5 số có kể thứ tự (năm số này có thể giống nhau hoặc khác nhau đôi một).

5. Tổ hợp và hoán vị (cho phép lặp) của tập n phần tử

a) Nếu thực hiện phép chọn n phần tử trong k nhóm (các phần tử trong mỗi nhóm giống nhau và số phần tử trong mỗi nhóm lớn hơn hay bằng n) ta có số phép chọn là: C_{n+k-1}^{k-1}. Đây là *số tổ hợp (cho phép lặp) của n phần tử chọn từ k nhóm.*

Ví dụ: Số cách chọn 6 cuốn sách thuộc ba loại Toán, Văn, Tin học trong một đống sách chứa cả ba loại (số sách mỗi loại lớn hơn hoặc bằng 6) là: $C_8^2 = 28$.

b) Số cách chia tập hợp n phần tử phân biệt thành k nhóm, trong đó nhóm thứ i có m_i phần tử khác nhau đôi một và $(m_1 + m_2 + ... + m_k) = n$ được tính theo công thức:

$$C_n^{m_1;m_2;...;m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!} \tag{1.1.5}$$

Đây là *số hoán vị (cho phép lặp) của n cái nhãn hiệu của k nhóm.*

Ví dụ: Số cách xếp 10 hành khách vào 3 toa tầu sao cho toa I có 3, toa II có 2, toa III có 5 là:

$$C_{10}^{3;2;5} = \frac{10!}{3!\,2!\,5!} = 2520 \text{ cách.}$$

Đây là số hoán vị lặp của 10 số (nhãn) I,II,III.

c) Từ công thức (1.1.5) có thể trở lại công thức (1.1.3) và ta có thể hiểu:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

là số cách chia tập n phần tử phân biệt thành 2 nhóm; một nhóm có k phần tử, nhóm kia có (n – k) phần tử.

6. Công thức khai triển nhị thức Niu-tơn

a) Công thức

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \tag{1.1.6}$$

(Giải thích (1.1.6): Trong công thức khai triển $(a + b)^n = (a + b)(a + b) ... (a + b)$, số hạng $a^{n-k}b^k$ xuất hiện C_n^k lần).

b) Các tính chất của khai triển nhị thức Niu-tơn

+ Vế phải của (1.1.6) gồm (n + 1) số hạng xếp theo thứ tự (mũ của a giảm dần từ n đến 0, trong khi mũ của b tăng dần từ 0 đến n hoặc ngược lại). Trong mỗi số hạng, tổng các số mũ của a và b luôn bằng n.
+ Các hệ số có tính đối xứng, tức là: $C_n^k = C_n^{n-k}$.
+ Hệ số của số hạng sau có thể suy từ hệ số của số hạng trước theo công thức:

$$C_n^{k+1} = \frac{C_n^k(n-k)}{k+1} = \frac{(\text{Hệ số trước}) \times (\text{số mũ của a})}{(\text{Số mũ của b}) + 1}$$

+ Các hệ số khai triển theo thứ tự lập nên tam giác Pascale:

$$\begin{array}{lll} C_0^0 & & \\ C_1^0 & C_1^1 & \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\ \ldots\ldots & & \end{array}$$

thỏa mãn tính chất: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \qquad (0 \le k \le n;\ k, n \in N)$

Tính ra số cụ thể, tam giác Pascale có dạng:

n	Các hệ số khai triển											
0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									
3	1	3	3	1								
4	1	4	6	4	1							
5	1	5	10	10	5	1						
6	1	6	15	20	15	6	1					
7	1	7	21	35	35	21	7	1				
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

1.1.1.2. Số phức

1. Định nghĩa

Số phức là một số có dạng:

$$Z = a + i\,b$$

trong đó:

a, b là hai số thực;

i là đơn vị ảo với $i^2 = -1$

(a được gọi là *phần thực*, kí hiệu ReZ, còn i b được gọi là *phần ảo* của Z, kí hiệu ImZ; khi a = 0, Z là *số thuần ảo* còn khi b = 0, Z là *số thực*).

Người ta biểu diễn số phức Z = a + ib bằng điểm M(a; b) trong hệ toạ độ vuông góc xOy. Khi đó:

$$r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

được gọi là *môđun*, kí hiệu $|Z|$ và $\varphi = \widehat{xOM}$ (với $tg\varphi = \frac{b}{a}$; chọn φ sao cho: $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ khi a = 0) là *acguymen chính* của số phức Z, kí hiệu là argZ.

Số phức có thể viết dưới *dạng đại số*:

$$Z = a + ib$$

hoặc *dạng lượng giác*:

$$Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Hai số phức có cùng phần thực và có phần ảo đối nhau được gọi là *hai số phức liên hợp* (Z = a + ib và $\bar{Z}$ = a − ib).

2. Các phép tính trên tập số phức

+ Phép cộng (hoặc phép trừ) cho ta tổng (hoặc hiệu) hai số phức:

$$(a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

+ Phép nhân cho ta tích hai số phức:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

+ Phép chia cho ta thương hai số phức (với điều kiện $Z_2 \neq 0$, tức là: $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$).

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{a_2^2 + b_2^2}i$$

+ Tổng hai số phức liên hợp bằng:

$$Z + \bar{Z} = 2a = 2ReZ.$$

+ Tích hai số phức liên hợp bằng:

$$Z \times \bar{Z} = a^2 + b^2 = |Z|^2.$$

+ Phép nhân và phép chia hai số phức viết dưới dạng lượng giác sẽ rất tiện lợi:

Chẳng hạn với hai số phức:

$$Z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

và

$$Z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

ta có thể tính mô đun và aguymen của tích hoặc thương hai số theo các công thức:

$$|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2| = r_1 r_2;$$

$$\arg(Z_1 \times Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2 = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \quad (Z_2 \neq 0);$$

$$\arg\frac{Z_1}{Z_2} = \arg Z_1 - \arg Z_2 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

+ Phép lũy thừa và khai căn đối với số phức cũng có thể thực hiện bằng dạng lượng giác:

với $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

và n là số nguyên dương, ta có:

$$Z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

và $$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, ..., n-1)$$

+ Lũy thừa bậc n của một số phức Z còn có thể tính được theo *khai triển Niu-tơn*:

$$Z^n = (a + ib)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}(ib)^k$$

và n giá trị căn bậc n cũng có thể tính được bằng cách giải hệ phương trình đại số, chẳng hạn để khai căn bậc hai của Z = a + ib, người ta đặt $\sqrt{Z} = x + iy$, rồi giải hệ:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b \end{cases}$$

để tìm x, y.

1.1.1.3. Cấp số

1. Cấp số cộng (CSC)

CSC là một dãy số hữu hạn hoặc vô hạn, trong đó mỗi số hạng, kể từ số hạng thứ hai trở đi, luôn bằng số hạng đứng trước nó cộng với một số không đổi, gọi là *công sai*

$$u_n = u_{n-1} + d \qquad (1.1.7)$$

với:

n là số nguyên, $n \geq 2$;

d là công sai, d = hằng số;

khi d > 0, CSC là *tăng* (hay tiến),

khi d < 0, CSC là *giảm* (hay lùi);

Kí hiệu CSC là ÷.

+ Muốn xác định một CSC, cần biết u_1, d và n (hữu hạn hoặc vô hạn).
+ Số hạng thứ n:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \qquad (1.1.8)$$

+ Tổng n số hạng đầu tiên của CSC là:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] \qquad (1.1.9)$$

2. Cấp số nhân (CSN)

CSN là một dãy số hữu hạn hoặc vô hạn, trong đó mỗi số hạng, kể từ số hạng thứ hai trở đi, luôn bằng số hạng đứng trước nó nhân với một số không đổi, gọi là *công bội*

$$u_n = u_{n-1} \times q \qquad (1.1.10)$$

với:

n là số nguyên dương, $n \geq 2$;

q là công bội, q = hằng số;

khi $q > 1$, CSN là *tăng* (hay tiến),

khi $0 < q < 1$, CSN là *giảm* (hay lùi);

Kí hiệu CSN là: $\div\div$.

+ Muốn xác định một CSN, cần biết u_1, q và n (hữu hạn hoặc vô hạn).
+ Số hạng thứ n:

$$u_n = u_1 q^{n-1} \qquad (1.1.11)$$

+ Tổng n số hạng đầu tiên của CSN là:

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{u_n q - u_1}{q-1} \quad \text{nếu } q \neq 1 \qquad (1.1.12)$$

$$S_n = nu_1 \quad \text{nếu } q = 1 \qquad (1.1.13)$$

+ Tổng các số hạng của một CSN vô hạn với $|q| < 1$ bằng:

$$S = \frac{u_1}{1-q} \qquad (1.1.14)$$

Công thức (1.1.14) có thể suy từ (1.1.12) khi cho $n \to \infty$.

1.1.1.4. Lôgarít

1. Định nghĩa

Với $N > 0$, $0 < a \neq 1$, phương trình:

$$a^x = N$$

có một nghiệm duy nhất, kí hiệu:

$$x = \log_a N$$

và được gọi là lôgarít theo cơ số a của N.

+ Từ định nghĩa trên, suy ra:

$$a^{\log_a N} = N;$$

$$\log_a a^x = x.$$

+ Lôgarít theo cơ số 10 được gọi là *lôgarít thập phân*, kí hiệu là lgN hoặc logN.
+ Lôgarít theo cơ số e được gọi là *lôgarít tự nhiên*, kí hiệu là lnN (e là số vô tỉ, có giá trị gần đúng là 2,71828).

2. Các công thức về lôgarít

$$\log_a(N_1 . N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2 \quad (N_1; N_2 > 0; 0 < a \neq 1)$$

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$$

$$\log_a N^\alpha = \alpha . \log_a N \qquad (\alpha \in \Re)$$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \qquad (0 < b \neq 1).$$

Có thể viết tổng quát hơn các công thức trên như sau:

$$\log_a |N_1 . N_2| = \log_a |N_1| + \log_a |N_2| \quad (N_1; N_2 \neq 0; 0 < a \neq 1)$$

$$\log_a \left|\frac{N_1}{N_2}\right| = \log_a |N_1| - \log_a |N_2|$$

$$\log_a N^{2n} = 2n \log_a |N| \qquad (N \neq 0)$$

1.1.1.5. Lượng giác

1. Đơn vị đo góc: radian

a) Định nghĩa

Góc một *radian* là góc có đỉnh O ở tâm một đường tròn bán kính R, chắn một cung AB trên đường tròn có độ dài bằng R.

b) Theo định nghĩa trên:

$$1 \text{ radian} \sim \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' 45''$$

$1^0 \sim \frac{\pi}{180}$ radian $\approx 0,017453$ radian ; 1' ~ 0,000291 radian; 1" ~ 0,000005 radian.

Góc tính theo độ	1^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Góc tính theo radian	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2. Các định nghĩa cơ bản

a) Trong hệ trực chuẩn xOy, đường tròn *định hướng* tâm O(0; 0), bán kính R = 1 được gọi là *đường tròn lượng giác*. Trên đường tròn này, cho điểm A(1; 0) và điểm M(x; y). Gọi cung AM tạo bởi một điểm chạy trên đường tròn từ A đến M (có thể quay nhiều vòng quanh tâm O, cùng chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ) là *cung lượng giác* với *điểm đầu* A, *điểm cuối* M.

b) Gọi α là số đo (tính theo độ hoặc radian) của cung lượng giác AM. Khi đó, người ta định nghĩa:

+ Tung độ điểm M là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = y.$$

+ Hoành độ điểm M là cos của α và kí hiệu là $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = x.$$

+ Tỉ số giữa tung độ và hoành độ điểm M (khi $x \neq 0$) là tang của α và kí hiệu là $\mathrm{tg}\alpha$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\mathrm{tg}\alpha \text{ xác định} \Leftrightarrow \cos\alpha \neq 0).$$

+ Tỉ số giữa hoành độ và tung độ điểm M là côtang của α và kí hiệu là $\mathrm{cotg}\alpha$:

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\mathrm{cotg}\alpha \text{ xác định} \Leftrightarrow \sin\alpha \neq 0)$$

$\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{cotg}\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác* của cung lượng giác α.

Đôi khi, người ta còn đưa vào các kí hiệu: $\mathrm{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$; $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Từ các định nghĩa trên, ta có thể xác định *dấu của các giá trị lượng giác* của α tùy theo vị trí điểm cuối M của cung này nằm ở góc phần tư nào trên đường tròn lượng giác.

3. Các hệ thức l- ợng giác cơ bản

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \forall\alpha$

b) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \forall\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \forall\alpha \neq k\pi;\ \ k \in Z$

c) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta;\quad \forall\alpha;\ \beta$

d) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta;\quad \forall\alpha;\ \beta$

Từ những công thức cơ bản trên, còn có các *công thức dẫn xuất* khác mà độc giả có thể tự suy ra được, chẳng hạn:

e) $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1+\cot g^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

f) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;

g) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$;

h) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$;

Độc giả có thể dễ dàng tìm được các công thức biến *tổng thành tích*; biến *tích thành tổng*; các công thức cho giá trị lượng giác của các *góc nhân đôi, chia đôi, nhân ba* cũng như các công thức tính sinx; cosx; tgx theo $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

4. Các hệ thức l- ợng giác để giải tam giác

Gọi: a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC, theo thứ tự đối diện với các góc A, B, C. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác; p là nửa chu vi tam giác; r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Khi đó, ta có:

+ Các định lý hình chiếu:

$$a = b\cos C + c\cos B;$$
$$b = c\cos A + a\cos C;$$
$$c = a\cos B + b\cos A.$$

+ Định lý hàm số sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Đặc biệt, nếu cho $A = 90^0$, $a = BC = 2R$, thì từ các định lý này, ta sẽ có những công thức liên quan giữa cạnh, góc, bán kính R để *giải một tam giác vuông*.

+ Định lý hàm số cos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Từ định lý này, có thể suy ra *định lý Pi-ta-go thuận và đảo*:

$$A = 90^0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

1.1.2. Hình học

1.1.2.1. Diện tích hình phẳng

1. Tam giác th- ờng

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

với h_a - chiều cao ứng với cạnh a.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(Công thức Hê-rông);}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C;$$

$$S = p\, r.$$

2. Tứ giác

+ Hình thang có diện tích:

$$S = \frac{a+b}{2} h$$

với:

a, b - độ dài hai đáy;

h - chiều cao.

+ Hình bình hành có diện tích:

$$S = ah$$

với:

a - chiều dài đáy;

h - chiều cao.

+ Hình thoi ABCD có diện tích:

$$S = \frac{1}{2} AC \times BD$$

+ Diện tích một tứ giác bất kỳ có thể tính bằng cách chia tứ giác thành hai tam giác.

3. Hình tròn bán kính R

+ Chu vi:

$$C = 2\pi R$$

+ Diện tích:

$$S = \pi R^2.$$

Từ công thức tính diện tích của hình tròn và tam giác, có thể suy ra công thức tính diện tích các hình *vành khăn, quạt tròn, viên phân*.

1.1.2.2. Diện tích và thể tích bề mặt của một số khối cơ bản

1. Diện tích

+ Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay:

$$S_{xq} = C_Đ h$$

+ Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay:

$$S_{xq} = \pi R l$$

trong đó:

$C_Đ$ - chu vi đáy;

h - chiều cao;

R - bán kính đáy;

l - độ dài đường sinh.

+ Mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2$$

với: R - bán kính hình cầu.

2. Thể tích

+ Hình lăng trụ:

$$V = S_Đ h$$

+ Hình chóp:

$$V = \frac{1}{3} S_Đ h$$

+ Hình chóp cụt:

$$V = \frac{h\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}{3}$$

+ Hình trụ tròn xoay:

$$V = S_Đ h$$

+ Hình nón:

$$V = \frac{1}{3} S_Đ h$$

+ Hình nón cụt:

$$V = \frac{h\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}{3}$$

+ Hình cầu:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \approx 4{,}1888\,R^3$$

với:

$S_Đ$ - diện tích đáy

h - chiều cao.

B, B’ - diện tích đáy lớn, đáy nhỏ.

Người ta còn tính diện tích mặt tròn xoay và thể tích khối tròn xoay bằng *định lý Guyn-đanh* hoặc bằng tích phân (xem 1.2.4).

1.1.2.3. Hình giải tích trong mặt phẳng và trong không gian

1. Phép tính vectơ

a) *Vectơ trong không gian* được xác định bởi một bộ ba số thực có thứ tự gọi là ba *toạ độ* của vectơ đó. Kí hiệu “vectơ a” là: $\vec{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$, khi đó, *độ dài* và *ba côsin chỉ hướng* của $\vec{a}$ được tính theo các công thức:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ;$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\left(\vec{a};\, \overrightarrow{Ox}\right) = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\beta = \cos\left(\vec{a};\, \overrightarrow{Oy}\right) = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \neq 0\right) \\ \cos\gamma = \cos\left(\vec{a};\, \overrightarrow{Oz}\right) = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{cases}$$

b) Các phép tính vectơ

+ Tổng (hiệu) hai vectơ là một vectơ có toạ độ bằng tổng (hiệu) các toạ độ tương ứng của hai vectơ đó.

+ Tích của vectơ với một số thực là một vectơ có toạ độ bằng tích số đó với các toạ độ của vectơ đã cho.

Các phép tính cộng, trừ, nhân vectơ với một số nói trên có các tính chất giống như các tính chất phép cộng, trừ, nhân hai số đại số.

+ Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a};\, \vec{b}$ là một số xác định theo công thức:

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = a_x.b_x + a_y.b_y + a_z.b_z$$

Tích vô hướng của hai vectơ có tính chất *giao hoán, kết hợp, phân bố* đối với phép cộng. *Điều kiện cần và đủ* để hai vectơ *vuông góc* với nhau là tích vô hướng của chúng bằng 0.

Từ công thức trên, ta có thể tính *góc hợp giữa hai vectơ khác* $\vec{0}$:

$$\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$$

+ Tích có (hữu) hướng của hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ là một vectơ $\vec{c} = \left[\vec{a};\vec{b}\right]$ có *phương* vuông góc với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$; có *chiều* sao cho ba vectơ $\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right)$ lập nên một bộ ba thuận (Nghĩa là, nếu đứng theo chiều của tích $\vec{c}$, ta sẽ nhìn thấy chiều quay một góc nhỏ nhất từ $\vec{a}$ sang $\vec{b}$ là ngược chiều kim đồng hồ); còn *môđun của tích có hướng* được xác định theo công thức:

$$\left|\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$$

Như vậy, $$\left[\vec{a};\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Tích có hướng của hai vectơ có tính chất *kết hợp, phân bố* đối với phép cộng, nhưng *không có tính giao hoán. Điều kiện cần và đủ* để hai vectơ *cộng tuyến (cùng phương)* với nhau là tích có hướng của chúng bằng $\vec{0}$.

Mô đun của tích có hướng hai vectơ bằng *diện tích của hình bình hành* lập nên bởi hai vectơ đó, khi ta đưa chúng về cùng một gốc.

+ *Tích hỗn hợp (hỗn tạp)* của ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ được ký hiệu là $D\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right)$ và bằng:

$$D\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right) = \left[\vec{a}; \vec{b}\right]\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Trị tuyệt đối của tích hỗn hợp $D\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right)$ có giá trị bằng *thể tích của một hình hộp* tạo bởi ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$, khi ta đưa chúng về cùng một gốc. Điều kiện cần và đủ để *ba vectơ đồng phẳng* (cùng song song với một mặt phẳng cố định nào đó) là *tích hỗn hợp* của chúng bằng 0.

2. Đ- ờng thẳng trong mặt phẳng (xOy)

a) Phương trình đường thẳng Δ qua điểm M_0 và có *vectơ pháp* $\vec{n}(A;B) \neq \vec{0}$ có thể viết theo:

+ Dạng vectơ:

$$\vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 0 \quad \forall M(x;\, y) \in \Delta;$$

+ Dạng tọa độ:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0);$$

+ Dạng tổng quát:

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0).$$

b) Phương trình đường thẳng Δ qua điểm M_0 và có *vectơ chỉ phương* $\vec{u}\,(a;b) \neq \vec{0}$ có thể viết theo:

+ Dạng vectơ:

$$\overrightarrow{M_0M} = k\vec{u} \quad \forall\, M(x;\, y) \in \Delta,\ (k \in \Re \text{ là tham số});$$

+ Dạng chính tắc:

$$\frac{(x - x_0)}{a} = \frac{(y - y_0)}{b} \quad (a^2 + b^2 > 0);$$

Trong dạng chính tắc này, người ta *quy ước*: khi gặp một phân thức nào có mẫu số bằng 0, tử số tương ứng cũng bằng 0 theo. Chẳng hạn, phương trình:

$$\frac{(x - x_0)}{0} = \frac{(y - y_0)}{b} \quad (b \neq 0)$$

biểu diễn đường thẳng qua điểm M_0 và vuông góc với Ox, tức là: $x = x_0$.

+ Dạng tham số:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad \left(a^2 + b^2 > 0;\ t \in \Re \text{ là tham số}\right).$$

c) Áp dụng các dạng nêu trên, ta có:

+ Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N phân biệt cho trước có dạng:

$$\frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M}.$$

+ Phương trình đường thẳng cho theo đoạn chắn:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad (m;n \neq 0)$$

biểu diễn đường thẳng MN với: M(m; 0); N(0; n) là hai điểm lần lượt nằm trên Ox; Oy.

+ Phương trình:

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

biểu diễn một đường thẳng qua điểm M_0 và có hệ số góc k = tgφ (φ là góc hợp bởi đường thẳng và chiều dương $\overrightarrow{Ox}$).

Dựa vào phương trình, vectơ chỉ phương hoặc vectơ pháp của hai đường thẳng trong (xOy), ta có thể xét *vị trí tương đối* và tính *góc* giữa chúng.

d) Công thức tính *khoảng cách* từ M_0 đến đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ là:

$$d(M_0;\Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (A^2 + B^2 > 0).$$

Gọi φ là *góc giữa hai đường thẳng* $(\varphi \le 90^0)$, φ có thể xác định theo các công thức sau:

$$\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{n_1};\ \overrightarrow{n_2})\right| \quad \text{(khi biết hai vectơ pháp)}$$

hoặc:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|k_1 - k_2|}{|1 + k_1k_2|} \quad \text{(khi biết hai hệ số góc của hai đường thẳng được xét).}$$

e) Đường thẳng: $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$ chia mặt phẳng toạ độ làm ba phần:

+ Phần I là tập hợp các điểm (x; y) thuộc đường thẳng thoả mãn đẳng thức:

  $Ax + By + C = 0.$

+ Phần II ,III là tập hợp các điểm (x; y) lần lượt thuộc hai nửa mặt phẳng, nằm hai phía đường thẳng được xét. Dựa theo chiều của vectơ pháp (A; B) tương ứng với chiều tăng của $(Ax + By + C)$ ta có thể xác định được phần nào của mặt phẳng ứng với

  $Ax + By + C < 0$,

  phần còn lại là tập hợp các điểm (x; y) thoả mãn bất đẳng thức:

  $Ax + By + C > 0.$

3. Các đ- ờng cong bậc hai

a) Đường tròn

Trong hệ trực chuẩn (xOy), phương trình:

$$F(x;y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

biểu diễn một đường tròn tâm I(−a; −b), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ · Trường hợp $a^2 + b^2 < c$, ta có *đường tròn ảo*, còn khi $a^2 + b^2 = c$, đường tròn thu về điểm I.

b) Ba đường cô-nic (Elip; Hypecbôn; Parabôn)

Phương trình tổng quát là:

$$F(x;\ y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,\quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

Sau khi dùng *phép biến đổi trực giao* đưa dạng toàn phương (gồm ba số hạng đầu của F(x;y)) về dạng chính tắc, ta dùng một phép đổi biến thích hợp (phép tịnh tiến hệ trục toạ độ) để đưa phương trình tổng quát trên về một trong các dạng sau đây:

+ Parabôn (P):

$$2px = y^2$$

trong đó: p là tham số tiêu;

có: Trục đối xứng Ox; Đỉnh O(0; 0); Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$; Đường chuẩn: $x = -\frac{p}{2}$.

Theo định nghĩa, (P) là tập hợp các điểm M(x; y) sao cho MF luôn bằng khoảng cách từ M đến đường chuẩn của nó. *Tâm sai* của (P) bằng 1.

+ Ellip (E_1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

trong đó: a, b là độ dài hai bán trục; a > b > 0; Nửa tiêu cự: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

có: Hai trục đối xứng: Ox, Oy; 4 đỉnh: (±a; 0) và (0; ±b); 2 tiêu điểm $F_{1,2}(\pm c; 0) \in Ox$;

Tâm sai $e = \frac{c}{a}$; Hai đường chuẩn: $x = \pm\frac{a^2}{c}$, mỗi đường chuẩn tương ứng với một tiêu điểm.

Theo định nghĩa, (E_1) là tập hợp các điểm M(x; y):

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

+ Ellip (E_2):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

trong đó: a, b là độ dài hai bán trục; b > a > 0; Nửa tiêu cự $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

có: Hai trục đối xứng: Ox, Oy; 4 đỉnh: (±a; 0) và (0; ±b); 2 tiêu điểm $F_{1,2}(0;\pm c) \in Oy$;

Tâm sai $e = \frac{c}{b}$; Hai đường chuẩn: $y = \pm\frac{b^2}{c}$, mỗi đường chuẩn tương ứng với một tiêu điểm.

Theo định nghĩa, (E_2) là tập hợp các điểm M(x;y):

$$MF_1 + MF_2 = 2b.$$

Nếu a = b, (E) có tâm sai bằng 0 và trở thành đường tròn. Với ellip thực, tâm sai luôn nằm trong khoảng (0; 1).

+ Hypecbôn (H_1):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

trong đó: a, b là độ dài hai bán trục; Nửa tiêu cự: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

có: Hai trục đối xứng: Ox, Oy trong đó Ox là *trục thực*, Oy là *trục ảo* (Oy không có điểm chung với (H_1)); 2 đỉnh (±a; 0); 2 tiêu điểm $F_{1,2}(\pm c; 0) \in Ox$; Tâm sai $e = \frac{c}{a} > 1$; Hai đường chuẩn: $x = \pm\frac{a^2}{c}$, mỗi đường chuẩn tương ứng với một tiêu điểm.

Theo định nghĩa, (H_1) là tập hợp các điểm M(x;y):

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

+ Hypecbôn (H_2):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

trong đó: a, b là độ dài hai bán trục; Nửa tiêu cự: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

có: Hai trục đối xứng: Ox, Oy trong đó Oy là *trục thực*, Ox là *trục ảo* (Ox không có điểm chung với (H_2)); 2 đỉnh (0; ±b); 2 tiêu điểm $F_{1,2}(0; \pm c) \in Oy$; Tâm sai $e = \frac{c}{b} > 1$; Hai đường chuẩn: $x = \pm\frac{b^2}{c}$, mỗi đường chuẩn tương ứng với một tiêu điểm.

Theo định nghĩa, (H_2) là tập hợp các điểm M(x;y):

$$|MF_1 - MF_2| = 2b.$$

Hai hypecbôn (H_1) và (H_2) có chung *hai đường tiệm cận* có phương trình: $y = \pm\frac{b}{a}x$. Người ta gọi (H_1) và (H_2) là hai *hypecbôn liên hợp*.

Nếu a = b, (H_1) và (H_2) là hai *hypecbôn vuông*.

+ Có thể *định nghĩa chung ba đường cônic* (*E; H; P*) là tập hợp các điểm M(x; y) sao cho tỷ số giữa khoảng cách từ M đến một điểm F cố định (*tiêu điểm*) và khoảng cách từ M đến một đường thẳng cố định Δ (***đường chuẩn***) luôn bằng một hằng số e (F và Δ cùng nằm trong mặt phẳng xOy và $F \notin \Delta$).

$$(C) \equiv \left\{ M(x;\, y) : \frac{MF}{d(M;\, \Delta)} = e \right\}$$

Khi e = 1, (C) là một *parabôn*; Khi e > 1, (C) là *một nhánh của hypecbôn*, còn khi $e \in (0;\, 1)$ thì (C) là một *elip*.

+ Ngoài các trường hợp đã nêu, từ phương trình tổng quát của đường bậc hai, ta còn gặp một số *trường hợp suy biến*. Đây là các trường hợp: tập hợp các điểm (x; y) thoả mãn phương trình hoặc rỗng (đường cong ảo) hoặc thu về một điểm hay hai đường thẳng nằm trong cùng một mặt phẳng.
+ Đường cônic có thể coi là giao của một mặt nón tròn xoay với một mặt phẳng. Tùy theo vị trí tương đối của chúng mà giao tuyến là elip, hypecbôn, parabôn hay hai đường thẳng cắt nhau.

4. Mặt phẳng trong không gian (Oxyz)

a) Phương trình mặt phẳng (α) qua điểm M_0 và có vectơ pháp $\vec{n}\,(A;\, B;\, C) \neq \vec{0}$ có thể viết theo:

+ Dạng vectơ:

$$\vec{n}\ \overrightarrow{M_0M} = 0 \quad \forall M(x\,;\, y;\, z) \in (\alpha);$$

+ Dạng toạ độ:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \left(A^2 + B^2 + C^2 > 0\right);$$

+ Dạng tổng quát:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \left(A^2 + B^2 + C^2 > 0\right).$$

b) Phương trình mặt phẳng (α) qua điểm M_0 và có hai vectơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1) \neq \vec{0}; \overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2) \neq \vec{0}$$

(hai vectơ này không được cộng tuyến) có thể viết theo:

+ Dạng vectơ:

$$\overrightarrow{M_0M} = m\overrightarrow{u_1} + n\overrightarrow{u_2} \quad \forall M(x;\, y;\, z) \in (\alpha),\ (m;\, n \in \Re \text{ là hai tham số});$$

+ Dạng tham số:

$$\begin{cases} x = x_0 + ma_1 + na_2 \\ y = y_0 + mb_1 + nb_2 & \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 > 0; a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 > 0\right) \\ z = z_0 + mc_1 + nc_2 & \left(m; n \in \Re \text{ là hai tham số}\right). \end{cases}$$

+ Dạng định thức:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

c) Áp dụng các dạng nêu trên, ta có thể viết:

+ *Phương trình mặt phẳng qua ba điểm* M, N, P cho trước, không thẳng hàng bằng cách chọn hoặc một vectơ pháp (chẳng hạn: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right]$) hoặc hai vectơ chỉ phương (chẳng hạn: $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$) hoặc chọn dạng tổng quát, rồi xác định các hệ số A, B, C, D (sai khác một thừa số nhân) sao cho toạ độ ba điểm đã cho thoả mãn dạng này.
+ *Phương trình mặt phẳng cho theo đoạn chắn*:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \quad (m;\ n;\ p \neq 0)$$

biểu diễn mặt phẳng (MNP) với: M(m; 0; 0); N(0; n; 0); P(0; 0; p) là ba điểm lần lượt nằm trên Ox; Oy;Oz.

Dựa vào phương trình, hai vectơ chỉ phương hoặc vectơ pháp của hai mặt phẳng trong (Oxyz), ta có thể xét *vị trí tương đối* và tính *góc* giữa chúng.

d) Công thức tính *khoảng cách* từ M_0 đến mặt phẳng (α):

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \left(A^2 + B^2 + C^2 > 0\right)$$

là:

$$d\left(M_0; (\alpha)\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Gọi φ là *góc giữa hai mặt phẳng* $\left(\varphi \le 90^0\right)$, φ có thể xác định theo công thức:

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}\right)\right|.$$

e) Mặt phẳng:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \left(A^2 + B^2 + C^2 > 0\right)$$

chia không gian làm ba phần:

+ Phần I là tập hợp các điểm (x; y; z) thuộc mặt phẳng thoả mãn đẳng thức:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

+ Phần II, III là tập hợp các điểm (x; y; z) lần lượt thuộc hai nửa không gian nằm hai phía mặt phẳng được xét. Dựa theo chiều của vectơ pháp (A; B; C) tương ứng với chiều tăng của $(Ax + By + Cz + D)$ ta có thể xác định được phần nào của không gian ứng với $Ax + By + Cz + D < 0$, phần còn lại là tập hợp các điểm (x; y; z) thoả mãn bất đẳng thức: $Ax + By + Cz + D > 0$.

5. Các mặt bậc hai

a) Mặt cầu

Trong hệ trực chuẩn (Oxyz), phương trình:

$$F(x;\ y;\ z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

biểu diễn một mặt cầu tâm I(−a; −b; −c), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Trường hợp $a^2 + b^2 + c^2 < d$, ta có *mặt cầu ảo*, còn khi $a^2 + b^2 + c^2 = d$, mặt cầu thu về điểm I.

b) Các mặt bậc hai có phương trình tổng quát

$$F(x;y;z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

trong đó, sáu hệ số của các số hạng bậc hai không thể đồng thời bằng 0.

Sau khi dùng *phép biến đổi trực giao* đưa dạng toàn phương (gồm sáu số hạng đầu của F(x; y; z)) về dạng chính tắc, ta dùng phép đổi biến thích hợp (tịnh tiến hệ trục toạ độ) để đưa phương trình tổng quát trên về một trong các dạng sau đây:

+ Elipxôit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{(a, b, c là độ dài ba bán trục).}$$

+ Hypecbôlôit 2 tầng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad \text{(Oz là trục đối xứng).}$$

+ Hypecbôlôit 1 tầng:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{(Oy là trục đối xứng).}$$

+ Mặt nón bậc hai:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \text{(Oz là trục đối xứng).}$$

+ Parabôlôit elliptic:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

+ Parabôlôit hypecbôlôit (Mặt yên ngựa):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

+ Mặt trụ elliptic:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (các đường sinh song song với trục đối xứng Oz).}$$

+ Mặt trụ hypecbôlic:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

+ Mặt trụ parabôlic:

$$\frac{x^2}{a^2} = 2py.$$

Ngoài các trường hợp đã nêu, từ phương trình tổng quát của mặt bậc hai, ta còn gặp một số *trường hợp suy biến*. Đây là các trường hợp: tập hợp các điểm (x; y; z) thoả mãn phương trình hoặc rỗng (mặt cong ảo) hoặc thu về một điểm hoặc hai mặt phẳng cắt nhau, song song hay trùng nhau.

1.2. TOÁN CAO CẤP

1.2.1. Đại số tuyến tính

1.2.1.1. Định thức

1. Định thức cấp hai, cấp ba

a) Định nghĩa

+ *Định thức cấp hai* là một số, kí hiệu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

+ *Định thức cấp ba* là một số, kí hiệu:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

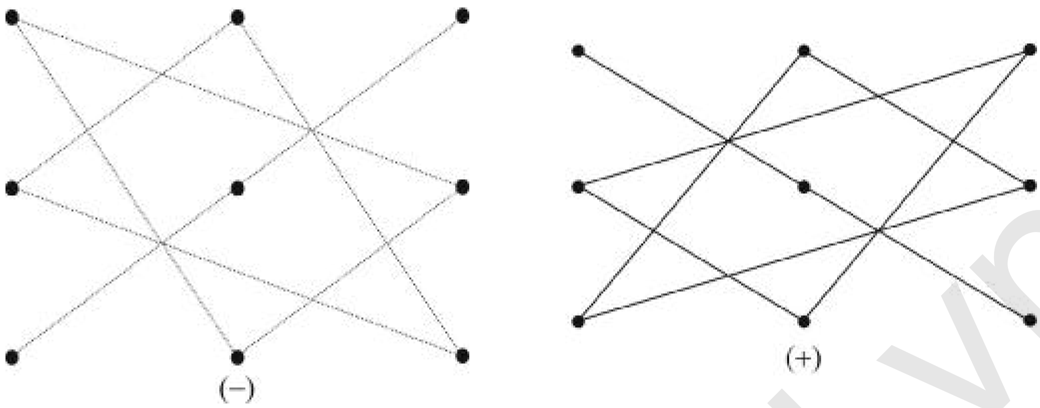
+ *Quy tắc Sarius* để tính định thức D thể hiện qua các bảng sau:

Bảng chữ nhật

$$D = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

Các bảng tam giác



Ta còn có thể tính D bằng cách *khai triển nó theo một hàng hoặc một cột*, chẳng hạn:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$\left(A_{ij}\right.$ được gọi là *phần phụ đại số* của $\left.a_{ij}\right)$.

b) Tính chất của định thức

+ Định thức *không thay đổi giá trị* khi ta:
  - đổi hàng thành cột, cột thành hàng (Phép *chuyển vị*);
  - nhân một hàng (cột) với một số khác không, rồi cộng tương ứng vào các số (phần tử) của một hàng (cột) khác;
  - đưa thừa số chung của từng hàng (cột) ra ngoài dấu định thức.
+ Định thức sẽ *đổi dấu* khi ta:
  - đổi chỗ hai hàng (cột);
  - đổi dấu một hàng (cột).
+ Định thức sẽ *bằng không* nếu có:
  - hai hàng (cột) giống nhau;
  - một hàng(cột) bằng *tổ hợp tuyến tính* của một số hàng (cột) khác.

2. Định thức cấp n

a) Định nghĩa:

Định thức cấp n là một số, kí hiệu:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

là tổng của (n!) tích n phần tử nằm trên những hàng và cột khác nhau của định thức, với dấu tùy thuộc vào k là *số các nghịch thế* của hoán vị n số tự nhiên đầu tiên (j_1, j_2, j_3, ..., j_n). Đây là dãy các chỉ số cột của n phần tử, sau k lần đổi chỗ lần lượt hai trong n chỉ số cột này, ta sẽ có dãy n số tự nhiên đầu tiên (1, 2, 3, ..., n).

b) Dựa vào các tính chất của định thức cấp n (giống như các tính chất đã nêu với các định thức cấp hai, cấp ba) cũng như các cách khai triển theo một hàng hay một cột, ta có thể tính các định thức cấp n. Chẳng hạn, nếu khai triển theo hàng hay cột đầu tiên:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n} =$$

$$= a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \dots + a_{n1} A_{n1}.$$

Trong công thức trên, A_{ij} (i = 1, 2, ... , n; j = 1, 2, ... , n) là *phần phụ đại số* của phần tử a_{ij} của định thức. Đó là tích của số $(-1)^{i+j}$ và định thức cấp (n − 1) suy từ định thức cấp n đã cho bằng cách bỏ đi hàng và cột chứa phần tử a_{ij}.

3. Dùng định thức để giải hệ ph- ơng trình tuyến tính

Cho hệ n phương trình tuyến tính n ẩn $(n \in N)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

trong đó b_i và a_{ij} (i = 1, 2, ... , n; j = 1, 2, ... , n) là các hệ số đã biết và x_j (j = 1, 2, ... , n) là các ẩn số phải tìm. Để tìm ***nghiệm của hệ***, đầu tiên, ta tính các định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ (Δ được gọi là *định thức của hệ*);

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ b_n & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1} & b_n \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \dots ; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & b_2 \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & b_n \end{vmatrix}$$

(Định thức Δ_j chỉ khác định thức Δ ở cột thứ j là cột các hệ số tự do b_i). Sau đó, ta áp dụng các *qui tắc*:

+ Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ phương trình (thường được gọi là hệ *Cramer*) *có nghiệm duy nhất*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \dots ; \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

+ Nếu $\Delta = 0$ và một trong các $\Delta_j \neq 0$ (j = 1, 2, ... , n) thì *hệ phương trình vô nghiệm.*
+ Nếu $\Delta = \Delta_j = 0 \;\; \forall j$ và trong *định thức Δ của hệ có ít nhất một phần tử khác 0*, thì *hệ phương trình vô định* (có vô số nghiệm). Trong trường hợp tất cả các phần tử trong *định thức* Δ *của hệ đều bằng 0*, các hệ thức: $\Delta = \Delta_j = 0 \;\; \forall j$ chứng tỏ rằng *hệ sẽ có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm*, tùy theo các hệ số b_i đã cho.

Các trường hợp *hệ tương thích* (có ít nhất một nghiệm), *xác định* (có duy nhất nghiệm), *vô định* hoặc *vô nghiệm* được suy từ định lý *Crônécke-Capeli* (xem mục 1.2.1.2 điểm 5).

1.2.1.2. Ma trận

1. Các định nghĩa

+ *Ma trận cấp (hoặc kiểu) m × n* là một bảng chữ nhật gồm m × n số (được gọi là các *phần tử* của ma trận) a_{ij} (i = 1, 2, ... , m; j = 1, 2, ... , n) sắp xếp thành m hàng và n cột. Ký hiệu gọn: $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ hoặc ký hiệu đầy đủ là:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

+ Ma trận cấp n × n, được gọi là *ma trận vuông cấp n.*
+ Các phần tử a_{ii} (i = 1, 2, ... , n) lập nên *đường chéo chính* của ma trận.
+ Ma trận vuông với:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad i = j \\ 0 & \text{khi} \quad i \neq j \end{cases}$$

được gọi là *ma trận đơn vị cấp n*, kí hiệu E_n.

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}_{(n\times n)}$$

+ Ma trận chỉ gồm một cột gọi là *ma trận cột* hay *vectơ cột*:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{bmatrix}$$

+ Ma trận chỉ gồm một hàng gọi là *ma trận hàng* hay *vectơ hàng*:

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & ...y_n \end{bmatrix}$$

+ *Ma trận không*, ký hiệu $\mathcal{O}$, là ma trận có các phần tử đều bằng không

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 10 \end{bmatrix}_{(m\times n)}$$

+ *Ma trận chuyển vị* của một ma trận A, ký hiệu là A^T (hay A^c; A'), được suy từ A bằng cách đổi cột thành hàng, hàng thành cột:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

+ Hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$, cùng cấp được gọi là *bằng nhau* nếu $a_{ij} = b_{ij}$, với mọi i và j. Ký hiệu: A = B.

2. Các phép tính về ma trận

a) Cộng hai ma trận cùng cấp

Cho $A = (a_{ij})_{m,n}$ và $B = (b_{ij})_{m,n}$. Ma trận C được gọi là *tổng hai ma trận* A và B $\Leftrightarrow A + B = C$ với:

$$C = (c_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}.$$

Phép cộng của ma trận cùng cấp có các tính chất: *giao hoán, kết hợp*.

Phương trình A + X = B, trong đó A và B là hai ma trận cùng cấp đã biết bao giờ cũng có nghiệm: $X = (x_{ij})_{m,n} = (b_{ij} - a_{ij})_{m,n} = B - A$ (Ma trận X được gọi là *hiệu của B và A*).

b) Nhân ma trận với một số

Cho $A = (a_{ij})_{m,n}$ và một số $\lambda \in \Re$ nào đó, khi đó:

$$\lambda A = \left(\lambda\ a_{ij}\right)_{m,n}$$

Các tính chất của phép nhân ma trận với một số:

1) $\lambda A = A\lambda;$

2) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A);$

3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B;$

4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$

5) $\left|\lambda A\right| = \lambda^n \left|A\right|$

(tính chất 5 chỉ được áp dụng cho *ma trận vuông* cấp n).

c) Nhân hai ma trận

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ và $B = \left(b_{ij}\right)_{n,p}$ có số cột của ma trận thứ nhất bằng số hàng của ma trận thứ hai (Khi đó, ta gọi A và B là hai *ma trận nhân được*). Tích hai ma trận đó sẽ là một ma trận được xác định như sau:

$$AB = C = (c_{ij})_{m,p}$$

với $\begin{cases} i = 1, 2, ..., m \\ j = 1, 2, ..., p \end{cases}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Các tính chất của phép nhân hai ma trận:

1) Không giao hoán, tức là nói chung:

$AB \neq BA;$

2) Kết hợp (đối với phép nhân với một số):

$\lambda(AB) = (\lambda A)B$

với λ là một số thực bất kỳ;

3) Kết hợp (đối với phép nhân giữa các ma trận *nhân được*):

$(AB)C = A(BC) = ABC\ ;$

4) Phân phối đối với các phép cộng trừ hai ma trận:

$(A \pm B)C = AC \pm BC;$

$C(A \pm B) = CA \pm CB;$

5) $AE = A;$

$EB = B,$

với: A, B, E là các ma trận vuông cùng cấp;

E là ma trận đơn vị;

(Tính chất 5 còn có thể mở rộng với A và B không phải là ma trận vuông, còn E là ma trận vuông đơn vị, nhân được bên trái với A (hoặc bên phải với B)).

6) $(AB)^c = B^c A^c$

(Chuyển vị của một tích hai ma trận nhân được bằng tích các chuyển vị của hai ma trận ấy tính theo *thứ tự ngược lại*).

Chú ý: Từ $AB = \varnothing$ nói chung không suy ra $A = \varnothing$ hoặc $B = \varnothing$ được. Từ AB = AC nói chung không suy ra B = C được.

3. Ma trận nghịch đảo

a) Định nghĩa

Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})_{n,n}$. Nếu tồn tại một ma trận vuông X cấp n, sao cho: AX = XA = E (ma trận đơn vị cấp n) thì X được gọi là *ma trận nghịch đảo* của ma trận A, kí hiệu

$$X = A^{-1}$$

Ma trận nghịch đảo của ma trận A tồn tại khi và chỉ khi $|A| \neq 0$, khi đó ta nói A là ma trận vuông *không suy biến*.

b) *Công thức tìm ma trận nghịch đảo* của A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

trong đó A^* được gọi là *ma trận phụ hợp* của ma trận A:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

lập nên từ các phần tử A_{ij} (phần phụ đại số tương ứng của a_{ij} trong A) và phép chuyển vị: $A^* = \left(A_{ij}\right)_{n,n}^c$.

Trong *tính toán thực hành*, để tìm ma trận nghịch đảo của A, người ta dùng các *phép biến đổi sơ cấp* sau đây để đưa ma trận $\left(A \middle| E\right)$ (cấp $n \times 2n$) thành ma trận $\left(E \middle| A^{-1}\right)$:

1) Đổi chỗ hai hàng hoặc hai cột;
2) Nhân các phần tử của một hàng (cột) với một số khác 0;
3) Cộng vào các phần tử của một hàng (cột) các phần tử tương ứng của một hàng (cột) khác sau khi đã nhân với một số nào đó.

Đôi khi, ta còn có thể *giải ngược hệ phương trình đại số tuyến tính*:

$$AX = Y$$

để có $A^{-1}Y = X$,

sau đó suy ra A^{-1}.

c) Tính chất của ma trận nghịch đảo:

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \quad \forall A$ không suy biến

2) $\left(A^{-1}\right)^{c} = \left(A^{c}\right)^{-1}$

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. Hạng của ma trận

a) Định nghĩa

Cấp cao nhất của *tử thức (định thức con)* khác không của một ma trận được gọi là *hạng* của ma trận đó. Kí hiệu r(A) hoặc rank(A). Ma trận $\mathcal{O}$ có $r(\mathcal{O}) = 0$. (*Định thức con* cấp k $\left(0 \le k \le \min(m;n)\right)$ của một ma trận $A_{m,n}$ là định thức lập nên từ các phần tử nằm tại giao của k hàng và k cột bất kì của ma trận).

b) Các phương pháp tính r(A)

+ Phương pháp I

Nếu $A \neq \mathcal{O}$, ta xét các tử thức từ cấp thấp lên cấp cao theo nguyên tắc là: Khi gặp một định thức con D cấp k nào đó khác không, ta cần tính đến các định thức con cấp (k + 1) chứa D, nếu các định thức này đều bằng 0 thì r(A) = k.

+ Phương pháp II

Dùng các *phép biến đổi sơ cấp* trình bày ở mục 1.2.1.2 điểm 3 có thể đưa một ma trận bất kỳ về ***dạng tam giác hoặc dạng hình thang*** (với các phần tử nằm ngoài tam giác hoặc hình thang đó đều bằng 0) mà vẫn giữ nguyên hạng của ma trận đó. Với các dạng này, *số phần tử khác 0* nằm trên đường chéo chính sẽ bằng hạng của ma trận.

5. Dùng ma trận giải hệ ph- ơng trình đại số tuyến tính

a) Trường hợp số phương trình bằng số ẩn

Ta có thể viết hệ n phương trình, n ẩn số dưới dạng ma trận:

$$AX = B.$$

Nếu định thức của hệ (cũng là định thức của ma trận A) khác 0 (hệ Cramer) thì ma trận A có ma trận nghịch đảo và vectơ nghiệm của hệ sẽ là:

$$X = A^{-1}B.$$

b) Trường hợp hệ m phương trình n ẩn số với m, n bất kì

Xét hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

với ma trận $A = (a_{ij})_{m,n}$ và *ma trận mở rộng* $\overline{A}\left(A|B\right)$ (có m hàng và n+1 cột).

Định lý Crônécke-Capeli:

Hệ (*) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$r(A) = r\left(\overline{A}\right).$$

Khi đó :

+ Nếu

$$r(A) = r\left(\overline{A}\right) = n \text{ (số ẩn của hệ)}$$

thì hệ (*) là *xác định* (*có nghiệm duy nhất*);

+ Nếu

$$r(A) = r\left(\overline{A}\right) < n$$

thì hệ (*) là *vô định* (*có vô số nghiệm*).

Với hệ vô định, đặt $r = r(A) = r\left(\overline{A}\right) < n$, ta sẽ chọn ra một định thức con khác 0, cấp r của A, từ đó chọn ra r ẩn số tương ứng (gọi là *ẩn* (*biến*) *cơ sở*). Các ẩn còn lại sẽ là *ẩn* (*biến*) *tự do*. Bằng cách gán cho các ẩn tự do *những bộ giá trị tuỳ ý*, rồi giải hệ r phương trình với r ẩn cơ sở đã chọn, ta sẽ nhận được một nghiệm của hệ đã cho. Số nghiệm trở nên vô định vì có vô số cách gán những giá trị tuỳ ý cho các ẩn tự do.

Từ định lý Crônécke-Capeli, trong trường hợp m = n, có thể suy ra các kết luận về số nghiệm của hệ như đã trình bày ở mục 1.2.1.1 điểm 3.

c) *Phương pháp loại dần ẩn số* do Gauss đưa ra để giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Cơ sở của phương pháp này là dùng các phép biến đổi tương đương đưa ma trận mở rộng của hệ về *dạng tam giác hoặc dạng hình thang*. Đối với hệ mới, việc tìm lần lượt các giá trị của ẩn số sẽ dễ dàng hơn rất nhiều, nhất là khi ta sử dụng máy tính. Đây là một phương pháp giải đúng và hiệu quả, nhưng đối với các hệ phức tạp, ta chỉ nhận được kết quả gần đúng do phải làm tròn số.

1.2.2. Hàm số

1.2.2.1. Miền xác định và miền giá trị của một hàm số

Nếu ứng với một điểm $M(x_1; x_2; ...; x_n) \in \Omega \subset \Re^n$, ta có quy luật f để xác định một giá trị thực U = f(M) thì ta nói U là *hàm của n biến số* $x_i \left(i = \overline{1;n}\right)$. Ω được gọi là *miền xác định* (hay *tập xác định*) của hàm U. Tập tất cả các giá trị U có được, ứng với mọi điểm M thuộc miền xác định được gọi là *miền giá trị (hay tập giá trị)* của hàm số.

Đặc biệt, khi n = 1, ta có *hàm một biến*. Miền xác định và miền giá trị của hàm một biến là những tập con, nằm trong (hoặc trùm khắp) tập số thực ℜ.

1.2.2.2. Hàm sơ cấp

1. Hàm sơ cấp cơ bản là các hàm lũy thừa, mũ, lôgarit, hàm lượng giác, lượng giác ngược và các hàm hypecbôlic (của một biến x): shx, chx, thx, cothx.

a) Hàm lũy thừa có dạng:

$$y = x^{\alpha}$$

với α là một hằng số thực nào đó.

b) Hàm mũ có dạng:

$$y = a^x$$

với $0 < a \neq 1$ là cơ số hằng số nào đó.

c) Hàm lôgarit:

$$y = \log_a x$$

với $0 < a \neq 1$ là cơ số hằng số. Đây là hàm ngược của hàm mũ có cùng cơ số

d) Hàm lượng giác:

$$y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad y = \mathrm{tg}x; \quad y = \cot gx.$$

e) Hàm lượng giác ngược:

$$y = \arcsin x; \quad y = \arccos x; \quad y = \mathrm{arctg}x; \quad y = \mathrm{arc}\cot gx.$$

f) Hàm hypecbôlic là tên gọi chung cho các hàm số sau:

1) $y = \mathrm{shx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (Đọc là sin-hypecbôn của x).

2) $y = \mathrm{chx} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (Đọc là côsin-hypecbôn của x).

3) $y = \mathrm{thx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chx}}$ (Đọc là tang-hypecbôn của x).

4) $y = \coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shx}}$ (Đọc là cotang-hypecbôn của x).

Độc giả có thể tìm được miền xác định, miền giá trị, đồ thị của mỗi hàm số kể trên và các tính chất của chúng trong các sách giáo khoa.

2. *Hàm sơ cấp* là hàm (một hoặc nhiều biến) cho bởi một biểu thức giải tích duy nhất. (*Biểu thức giải tích* là một biểu thức bao gồm một số hữu hạn các phép tính số học, phép tính hàm hợp đối với các hàm sơ cấp cơ bản và hằng số).

1.2.2.3. Giới hạn và sự liên tục của hàm số

1. Giới hạn hàm số

Hàm U = f(M) được gọi là có giới hạn L trong quá trình $M \to M_0$ nếu và chỉ nếu: $\forall \varepsilon > 0$, nhỏ tùy ý cho trước, ta luôn tìm được một số $\delta = \delta(\varepsilon; M_0)$ (tức là δ phụ thuộc vào ε và M_0) sao cho khi M rơi vào δ-lân cận của điểm M_0 thì giá trị f(M) sẽ rơi vào ε-lân cận của L.

Định nghĩa giới hạn hàm số theo *ngôn ngữ $\varepsilon; \delta$* như trên có thể viết một cách ngắn gọn như sau:

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = L \Leftrightarrow \left\{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon; M_0) : 0 < MM_0 < \delta \Rightarrow |f(M) - L| < \varepsilon\right\}.$$

Với hàm một biến, ta có:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon; x_0) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right\}$$

và trong quá trình $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) : |x| > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right\}.$$

2. Hàm liên tục

a) Hàm U = f(M) được gọi là *liên tục* tại M_0

$$\Leftrightarrow \lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0) \Leftrightarrow \lim_{M\to M_0} \Delta f = \lim_{M\to M_0} \left[f(M) - f(M_0)\right] = 0.$$

Theo định nghĩa này, hàm f(M) phải xác định tại M_0 và tại lân cận M_0; M_0 phải là *một điểm tụ* trong miền xác định của hàm số; trong quá trình $M \to M_0$ giới hạn của hàm số phải tồn tại và hơn nữa giới hạn này phải bằng $f(M_0)$.

Nếu một trong các *điều kiện cần* nêu trên không thoả mãn, hàm f(M) bị *gián đoạn* tại M_0.

b) Để *phân loại điểm gián đoạn* của *hàm một biến*, người ta chia các điểm gián đoạn làm hai loại:

+ Nếu tại điểm x_0 tồn tại *giới hạn bên phải* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ (trong quá trình $x \to x_0$ thì $x \geq x_0$) và giới hạn bên trái $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (trong quá trình $x \to x_0$ thì $x \leq x_0$) thì x_0 được gọi là *điểm gián đoạn loại I*. Hiệu $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ được gọi là *bước nhảy của hàm số tại x_0*. Đặc biệt, nếu bước nhảy A = 0, thì x_0 được gọi là điểm *gián đoạn bỏ được*.

+ Điểm gián đoạn không thuộc loại I sẽ được gọi là *điểm gián đoạn loại II*. Với loại điểm gián đoạn này, hàm số có *bước nhảy vô hạn* khi qua điểm x_0.

c) Liên tục đều

Theo các định nghĩa trên, hàm U = f(M) được gọi là liên tục tại M_0 tức là:

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$$

$$\Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta = \delta(\varepsilon; M_0): 0 < MM_0 < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon\}$$

Nếu $\exists\delta = \delta(\varepsilon)$ (chỉ phụ thuộc ε) chung cho mọi điểm M_0 thuộc một miền Ω nào đó thì ta nói hàm f(M) *liên tục đều* trên Ω.

d) Tính liên tục của hàm sơ cấp

Hàm sơ cấp U = f(M) liên tục tại mọi điểm M_0 thuộc *miền xác định* của nó.

1.2.3. Phép tính vi phân

1.2.3.1. Đạo hàm và vi phân của hàm một biến

1. Đạo hàm của hàm một biến

a) Định nghĩa

Đạo hàm tại một điểm x của hàm y = f(x) là giới hạn (nếu có) của tỷ số giữa số gia hàm số (tương ứng với số gia đối số) và số gia đối số, khi số gia đối số tiến đến 0:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'(x)$$

b) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Giá trị y'(x) bằng *hệ số góc của tiếp tuyến* của đồ thị hàm số (C): y = f(x) tại điểm M(x; f(x)) trên (C).

c) Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Giá trị y'(x) bằng *tốc độ biến thiên* của y theo x tại điểm x. Nếu xét một chuyển động thẳng, có phương trình chuyển động s = s(t), thì s'(t) cho ta *tốc độ tức thời* v(t) của chất điểm tại thời điểm t, còn v'(t) (tức là s''(t)) sẽ cho *gia tốc tức thời*.

2. Vi phân của hàm một biến

a) Định nghĩa:

Nếu tại điểm x, số gia hàm số có thể biểu diễn dưới dạng $\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x)$ trong đó: A là hệ số chỉ phụ thuộc x (không phụ thuộc số gia đối số) còn $0(\Delta x)$ là một *vô cùng bé bậc cao* hơn Δx trong quá trình $\Delta x \to 0$ (nghĩa là $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0(\Delta x)}{\Delta x} = 0$), thì ta nói: hàm $y = f(x)$ *khả vi tại x*; đại lượng $A\Delta x$ (*phần chính của số gia* hàm số) được gọi là *vi phân* (*cấp một*) của hàm số, kí hiệu là dy hay df tại x.

b) Đối với hàm một biến, *khả vi tại x* tương đương với *có đạo hàm tại x* và

$$dy = f'(x)dx = f'(x)\,\Delta x$$

Trường hợp x là một hàm của biến khác, công thức $dy = f'(x)dx$ vẫn còn đúng, người ta nói đó là *tính bất biến của công thức vi phân*. (Chú ý: công thức $dy = f'(x)\Delta x$ chỉ đúng cho trường hợp x là *biến số độc lập*. Khi $x = x(t)$ thì $\Delta x = dx + 0(\Delta t) \neq dx$).

c) Công thức gần đúng nhờ vi phân cấp một

Nếu $f'(x)$ không triệt tiêu thì $\Delta y \approx dy$ hay là $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$

3) Các công thức cơ bản về đạo hàm hàm một biến (Chú ý tới miền xác định của mỗi công thức, không được viết ra ở đây)

1) $(C)' = 0$ ($C = \text{const}$)

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3) $(uv)' = u'v + uv'$

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$

5) $y = f(u),\ u = u(x) \Rightarrow y'_x = f'_u\, u'_x$

6) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$

7) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$

8) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

9) $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$

10) $\left(\log_a|x|\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

11) $(\sin x)' = \cos x$

12) $(\cos x)' = -\sin x$

13) $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \left(1 + \text{tg}^2 x\right)$

14) $(\text{cotg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \text{cotg}^2 x\right)$

15) $(\sec x)' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

16) $(\text{cosec}x)' = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

17) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

18) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

19) $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

20) $(\text{arccotg}x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

21) $(\text{sh}x)' = \text{ch}x$

22) $(\text{ch}x)' = \text{sh}x$

23) $(\text{th}x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$

24) $(\text{coth}x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x} = 1 - \text{coth}^2 x$

4. Đạo hàm và vi phân cấp cao của hàm một biến

a) Định nghĩa

Xét hàm y = f(x) xác định trên tập $X \subset \Re$, giả sử hàm này có đạo hàm y' = f'(x) và vi phân cấp một dy = f'(x)dx tại mọi $x \subset X_1 \subset X \subset \Re$, thì ta có thể tính đạo hàm của y' trên tập X_1. Ta có (y')' = y''(x) là *đạo hàm cấp hai* và $d^2y = f''(x)dx^2$ là *vi phân cấp hai* của y = f(x).

Nếu tại mọi $x \subset X_{n-1} \subset X_{n-2} \subset ... \subset X_1 \subset X \subset \Re$, hàm được xét có đạo hàm tới cấp (n −1), ta có thể tính đạo hàm cấp n (n nguyên, n ≥ 1) là: $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$, cũng như vi phân cấp n của hàm đã cho: $d^ny = y^{(n)}dx^n$ (Kí hiệu dx^n là $(dx)^n$ viết tắt).

b) Đạo hàm và vi phân cấp cao của một số hàm quen thuộc

$$y = \sin x; \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \quad d^ny = y^{(n)}dx^n;$$

$$y = \cos x; \quad y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \quad d^ny = y^{(n)}dx^n;$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad y^{(n)} = (-1)^{n-1}\, n!c^{n-1}\frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}}; \quad d^ny = y^{(n)}dx^n; ...$$

c) Công thức Taylơ (Taylor)

Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm đến cấp n + 1 tại mọi x thuộc lân cận điểm x_0. Khi đó, ta có công thức Taylơ:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... +$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

trong đó: phần dư thứ n:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left[x_0 + \theta(x-x_0)\right]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (0 \le \theta < 1).$$

Từ công thức Taylơ, nếu chỉ giữ lại hai số hạng:

$$f(x) = f(x_0) + f'\left[x_0 + \theta(x-x_0)\right](x-x_0)$$

ta sẽ được *công thức số gia giới nội* của Lagrange.

d) Công thức Mac-lô-ranh (Marlaurin)

Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm đến cấp n+1 tại mọi x thuộc lân cận điểm 0. Khi đó, với $x_0 = 0$, công thức Taylơ trở thành công thức Mac-lô-ranh:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n + R_n(x),$$

trong đó, phần dư thứ n:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \ (0 \le \theta < 1).$$

Người ta dùng các công thức Taylơ và Mac-lô-ranh để *tính gần đúng giá trị hàm f(x)* tại lân cận x_0.

1.2.3.2. Đạo hàm và vi phân của hàm n-biến

1. Đạo hàm riêng của hàm n-biến

$$u = f(M) \text{ với } M(x_1; x_2; ...; x_n) \in \Omega \subset \Re^n.$$

a) Định nghĩa

Đạo hàm riêng theo đối số x_k tại một điểm M của hàm u = f(M) là giới hạn (nếu có) của tỷ số giữa *số gia riêng* của hàm số (tương ứng với số gia đối số x_k) và số gia đối số, khi số gia đối số tiến đến 0.

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1;...;x_{k-1};x_k + \Delta x_k; x_{k+1}; ...; x_n) - f(x_1;...;x_{k-1};x_k;x_{k+1};...;x_n)}{\Delta x_k} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_k} = u'_{x_k}$$

b) Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng:

Để đơn giản, ta xét trường hợp n = 2. Khi đó giá trị $\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_M$ bằng *hệ số góc của tiếp tuyến* tại điểm M của giao tuyến giữa hai mặt có phương trình: $u = u(x_1; x_2)$ và $x_k = \text{const}$ với $k = 1 \vee 2$ trong không gian ba chiều $\Re^3$.

c) Ý nghĩa cơ học của đạo hàm riêng:

Giá trị $\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_M$ bằng *tốc độ biến thiên* của u theo x_k tại điểm M.

2. Vi phân của hàm n-biến

a) Định nghĩa

Nếu tại điểm M, *số gia toàn phần* của hàm số u = f(M) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_k\Delta x_k + ... + A_n\Delta x_n + 0(\Delta\rho)$$

trong đó: A_k (k = 1; 2; ...; n) là các hệ số chỉ phụ thuộc M (không phụ thuộc số gia các đối số) còn $0(\Delta\rho)$ là một *vô cùng bé bậc cao hơn* $\Delta\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}$ trong quá trình $\Delta\rho \to 0$, thì ta nói: hàm u = f(M) *khả vi tại M*; $du = \sum_{i=1}^{n} A_i\Delta x_i$ (*phần chính của số gia hàm số*) được gọi là *vi phân* (*cấp một*) của hàm số, kí hiệu là du hay df. Từ định nghĩa, có thể tính được:

$$A_i = \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_M .$$

b) ***Chú ý***

Đối với hàm nhiều biến, khả vi tại M có nghĩa là hàm có các đạo hàm riêng theo các biến tại M, nhưng có các đạo hàm riêng chưa đủ để hàm khả vi. Người ta chứng minh rằng: Nếu hàm nhiều biến có các đạo hàm riêng *liên tục* tại M thì hàm đó khả vi tại M.

c) Công thức gần đúng nhờ vi phân cấp một:

Nếu du khác 0 (các đạo hàm riêng không đồng thời triệt tiêu) thì:

$$\Delta u \approx du$$

hay là:
$$f(M) \approx f(M_0) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{M_0} \Delta x_i$$

3. Đạo hàm và vi phân cấp cao của hàm n-biến

a) Với hàm n-biến: u = f(M) có n đạo hàm riêng cấp một trên một miền nào đó trong không gian n-chiều, ta có thể tính các đạo hàm riêng theo mỗi biến của các đạo hàm riêng cấp một đó và sẽ được các *đạo hàm riêng cấp hai*: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ $\left(i; j = \overline{1, n}\right)$. Sẽ có tất cả n^2 đạo hàm riêng cấp hai, trong số đó có n *đạo hàm vuông* (i = j) và n(n − 1) *đạo hàm riêng chữ nhật* (i ≠ j). Tương tự, ta có thể định nghĩa các đạo hàm riêng cấp k = 3; 4; 5; ...

Định lý Svac:

Nếu hàm được xét *liên tục cùng các đạo hàm riêng* của nó thì đạo hàm riêng cấp cao theo các biến sẽ *không phụ thuộc vào thứ tự* lấy đạo hàm. (Khi đó, số các đạo hàm riêng phải tìm sẽ giảm đi đáng kể).

b) Việc tính *vi phân cấp cao* của hàm nhiều biến phức tạp hơn nhiều so với hàm một biến. Để đơn giản, ta chỉ xét *trường hợp n-biến độc lập* và có các công thức sau đây:

$$d^2u = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 u$$

...

$$d^k u = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u.$$

Các công thức trên được viết theo *quy ước để dễ nhớ*, chẳng hạn với hàm hai biến:

$u = f(x; y)$,

ta có:

$$d^2u = (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\Delta x\Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (\Delta y)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u$$

$$d^3u = (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3(\Delta x)^2 \Delta y \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + 3\Delta x(\Delta y)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + (\Delta y)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$$

$$= \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u$$

...

c) Công thức Taylơ cho hàm n-biến

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \ldots + \frac{1}{k!}d^k f(M_0) + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(\overline{M}),$$

trong đó, $\overline{M}$ là một điểm nằm trong lân cận M_0 và có "khoảng cách" đến M_0 nhỏ hơn M_0M. Khi chọn M_0 trùng với gốc toạ độ O của không gian n-chiều, công thức Taylơ trở thành *công thức Mac-lô- ranh*.

4. Đạo hàm của hàm số hợp và hàm ẩn

a) Đạo hàm hàm hợp

+ Nếu $u = f(x, y, z)$ với $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ thì u sẽ là *hàm hợp* đối với t:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

+ Nếu $u = f(x, y, z)$ với $z = z(x; y)$ thì u sẽ là *hàm hợp đối với hai biến x, y*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(y;z=\text{const})} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x;z=\text{const})} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\cdot$$

+ Nếu $u = f(x; y)$ với $y = y(x)$ thì u sẽ là *hàm hợp đối với x*:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\cdot$$

b) Đạo hàm hàm ẩn

+ Nếu trong hệ thức: $F(x, y) = 0$ có chứa *hàm ẩn $y = y(x)$*, thì:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad \left(F'_y \neq 0\right)$$

+ Nếu trong hệ thức: $F(x, y, z) = 0$ có chứa *hàm ẩn $z = z(x, y)$*, thì:

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} \quad \left(F'_z \neq 0\right); \\ z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\dfrac{F'_y}{F'_z}\cdot \end{cases}$$

+ Nếu trong hai hệ thức:

$$\begin{cases} F(x; y; z; u; v) = 0; \\ G(x; y; z; u; v) = 0, \end{cases}$$

có chứa *hai hàm ẩn $u(x; y; z)$ và $v(x; y; z)$* thì với điều kiện các *mẫu thức khác 0*:

$$u'_x = -\frac{\dfrac{D(F; G)}{D(x; v)}}{\dfrac{D(F; G)}{D(u; v)}}; \quad u'_y = -\frac{\dfrac{D(F; G)}{D(y; v)}}{\dfrac{D(F; G)}{D(u; v)}}; \quad u'_z = -\frac{\dfrac{D(F; G)}{D(z; v)}}{\dfrac{D(F; G)}{D(u; v)}};$$

$$v'_x = -\frac{\dfrac{D(F; G)}{D(u; x)}}{\dfrac{D(F; G)}{D(u; v)}}; \quad v'_y = -\frac{\dfrac{D(F; G)}{D(u; y)}}{\dfrac{D(F; G)}{D(u; v)}}; \quad v'_z = -\frac{\dfrac{D(F; G)}{D(u; z)}}{\dfrac{D(F; G)}{D(u; v)}}.$$

Trong các công thức trên, ta đã sử dụng các *ký hiệu của Jacôbi*, chẳng hạn:

$$\frac{D(F; G)}{D(x; y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

1.2.3.3. Cực trị tương đối và cực trị tuyệt đối của hàm số

1. Cực trị của hàm n-biến số

a) Xét hàm n-biến $y = f(M)$ với $M \in \Omega \subseteq R^n$. Nếu $f(M_0) \geq f(M)$ (*) $\forall M \in \varepsilon$-lân cận của M và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M_0$ thì ta nói hàm $y = f(M)$ đạt *cực đại* (tương đối) tại M_0, *giá trị cực đại* là $f(M_0)$, ký hiệu: $y_{max} = y_{cđ} = f(M_0)$.

Tương tự, thay cho (*), nếu có $f(M_0) \leq f(M)$ (**), thì ta nói hàm $y = f(M)$ đạt *cực tiểu* (tương đối) tại M_0, *giá trị cực tiểu* là $f(M_0)$, ký hiệu: $y_{min} = y_{ct} = f(M_0)$.

Trong hai định nghĩa trên, khi nói tới ε-lân cận, ta coi đó là tập tất cả các điểm M có khoảng cách tới M_0 (tức độ dài MM_0) ≤ ε. Như vậy, khi nói tới cực đại (hay cực tiểu) tương đối tại M_0, mặc nhiên cần hiểu M_0 là một *điểm trong của miền Ω* (tức là, có tồn tại ít nhất một δ-lân cận của M_0 bao hàm trong Ω). Vì ý nghĩa đó, y_{max} và y_{min} chỉ mang *tính địa phương* và được gọi là *cực trị tương đối*.

b) Nếu bất đẳng thức (*) [hoặc (**)] thoả mãn với mọi điểm M thuộc miền Ω, ta nói hàm $y = f(M)$ đạt *giá trị lớn nhất* [hoặc *nhỏ nhất*] tại M_0. Giá trị lớn nhất (GTLN) là $\max\limits_{x \in D} y$ [hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) là $\min\limits_{x \in D} y$] bằng $f(M_0)$. GTLN và GTNN được gọi là *cực trị tuyệt đối* của hàm đã cho trên miền Ω.

c) Để tìm *cực trị tuyệt đối* trên một miền Ω, ta thường tìm cực trị tương đối, sau đó so sánh chúng với các giá trị của hàm trên biên của Ω để xác định GTLN và GTNN. Khác với cực trị tương đối, nếu có, chỉ có thể đạt tại điểm trong của miền Ω, GTLN và GTNN của hàm số có thể đạt tại một điểm hay tại một miền nằm trong hoặc trên biên của Ω.

2. Điều kiện cần để có cực trị (t- ơng đối) của hàm n- biến

Nếu hàm $y = f(M)$ đạt cực trị (tương đối) tại M_0 và các đạo hàm riêng của hàm tồn tại (xác định, hữu hạn) trong lân cận M_0 (kể cả M_0) thì:

$$\overrightarrow{\text{gradf}} = \vec{0} \quad \text{tại } M_0$$

Ở đây, $\overrightarrow{\text{gradf}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \vec{i}_k = \vec{\nabla} f$, với $\vec{i}_k$ là vectơ đơn vị trên trục x_k và điều kiện trên có thể viết dưới dạng: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{M_0} = 0 \ \ (k = 1 \div n)$.

Điểm M_0 thoả mãn điều kiện trên được gọi là *điểm dừng*. Như vậy, nếu tại điểm cực trị, các đạo hàm riêng tồn tại thì chúng phải triệt tiêu, các điều kiện này là những *điều kiện cần* của cực trị. Dựa trên điều kiện cần, ta sẽ tìm cực trị của hàm số chỉ tại các điểm dừng hoặc các điểm mà tại đó, ít nhất một đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ không tồn tại (Các điểm này được gọi chung là các *điểm tới hạn* của hàm số).

3. Điều kiện đủ của cực trị t- ơng đối

a) Hàm số khả vi U = f(M) chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm dừng M_0 mà tại đó:

$$df(M_0) = 0.$$

Tại điểm M_o, hàm f(M) có:

+ *Cực đại* nếu:

$$df(M_0) = 0, \quad d^2f(M_0) < 0;$$

+ *Cực tiểu* nếu:

$$df(M_0) = 0, \quad d^2f(M_0) > 0.$$

Nếu $df(M_0) = 0$, $d^2f(M_0) = 0$, cần xét thêm dấu của *vi phân cấp cao hơn* của hàm f tại M_0.

b) Với hàm số của *hai biến số độc lập*: z = f(x, y), ta xét cực trị như sau:

+ Giải hệ hai phương trình

$$f'_x(x, y) = 0;$$

$$f'_y(x, y) = 0$$

để tìm điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$ (nếu có).

+ Tính

$$D = B^2 - AC,$$

với $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$.

Nếu $D < 0$ và $A > 0$ ($C > 0$) thì ***có cực tiểu*** tại M_0.

Nếu $D < 0$ và $A < 0$ ($C < 0$) thì có *cực đại* tại M_0.

Nếu $D > 0$ thì *không có cực trị* tại M_0.

Nếu $D = 0$ thì tại M_0 có thể có cực trị hoặc không, cần xét thêm bằng phương pháp khác.

c) Với hàm khả vi n-biến số, ngoài cách xét điều kiện đủ như ở mục a) (dùng vi phân cấp một, cấp hai), ta còn có thể dùng *ma trận Heissein*. Đó là một ma trận vuông H(M) có dạng như sau:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Với giả thiết hàm f(M) khả vi, có đạo hàm riêng liên tục cho tới cấp hai, ma trận Hessein H(M) luôn luôn là một ma trận vuông, đối xứng. Khi đó, *các tử thức chính* của ma trận $H(M_0)$ được tính như sau:

$$\begin{cases} \Delta_1(M_0) = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{M_0} \\ \Delta_2(M_0) = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}\right|_{M_0} = \left.\left(AC - B^2\right)\right|_{M_0} \\ \ldots \\ \Delta_n(M_0) = \det\left(H(M_0)\right). \end{cases}$$

Khi đó, các *điều kiện đủ cuả cực trị tương đối* được phát biểu theo 4 trường hợp sau:

1) Nếu $\Delta_j(M_0) > 0$ $\forall j = 1, 2, ..., n$, ma trận H(M) được gọi là *xác định dương* tại M_0 và hàm f đạt *cực tiểu* tại đó.
2) Nếu $(-1)^j \Delta_j(M_0) > 0$ $\forall j = 1, 2, ..., n$, tức là: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, v.v... (dấu của các tử thức chính đan nhau, tử thức với chỉ số lẻ thì âm, với chỉ số chẵn thì dương), ma trận H(M) được gọi là *xác định âm* tại M_0 và hàm f đạt *cực đại* tại đó.
3) Nếu $\Delta_1(M_0) > 0$ và $\Delta_j(M_0) \geq 0$ $\forall j = 2, ..., n$, ma trận H(M) được gọi là (*bán*) *nửa xác định dương*.

   Nếu $\Delta_1(M_0) < 0$ và $(-1)^j\Delta_j(M_0) \geq 0$ $\forall j = 2, ..., n$, ma trận H(M) được gọi là (*bán*) *nửa xác định âm*.

   Cả hai trường hợp này đều *không cho ta kết luận ngay về cực trị*. Cần dùng phương pháp khác.
4) Nếu H(M) không thoả mãn tất cả các trường hợp nêu trên, ta nói ma trận này *không xác định* tại M_0 và điểm dừng này sẽ *không phải là điểm cực trị*.

5. Cực trị có điều kiện của hàm n-biến

Giả sử ta phải tìm cực trị tương đối của hàm y = f(M) xác định trên miền $\Omega \subseteq R^n$ thoả mãn m điều kiện: $g_i(M) = b_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$.

Ở đây, m < n và các hàm f, g_i khả vi, liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng tới cấp cần thiết. (Chẳng hạn, với n = 2, m = 1 ta sẽ phải tìm cực trị của hàm hai biến $f(x_1; x_2)$ với điều kiện $g(x_1; x_2) = b$).

a) Đầu tiên, ta xét *hàm Lagrange*:

$$L(M; \lambda) = f(M) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[g_i(M) - b_i\right]$$

là hàm của (n + m) biến (tức là $x_1, x_2, ..., x_n$ và $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$). Người ta gọi các tham số λ_i (i = 1, 2, ..., m) là *các nhân tử Lagrange*.

b) Xét điều kiện cần của cực trị có điều kiện gồm các bước sau đây:

1) Tìm các *điểm dừng* của hàm Lagrange, tức là tìm nghiệm của hệ gồm (m + n) phương trình dưới đây:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 & (j = 1, 2, 3, ..., n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(M) - b_i = 0 & (i = 1, 2, 3, ..., m) \end{cases}$$

Giả sử hệ này cho ta các điểm dừng dạng:

$$\left(\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0;\ \ x_1^0, ..., x_n^0\right)$$

2) Lập ma trận Hessein H_L cuả hàm Lagrange và đặt nó vào trong *ma trận viền* $H_A(M)$, có dạng:

$$H_A(M) = \begin{bmatrix} (0)_{m\times m} & \vdots & J \\ .... & \vdots & ..... \\ J' & \vdots & H_L \end{bmatrix}; \quad J = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{m,n}$$

trong đó $(O)_{m\times m}$ là ma trận vuông gồm các phần tử đều bằng 0, H_L là ma trận Hessein của hàm Lagrange (gồm n hàng, n cột), ma trận J và ma trận chuyển vị J' của nó được tính theo các đạo hàm riêng cấp một của m hàm $g_i(M)$ theo n biến x_j.

c) Xét điều kiện đủ của cực trị có điều kiện. Các trường hợp xảy ra:

1) Nếu (n − m) *tử thức chính sau cùng* của H_A tại M_0 đều dương với m chẵn hoặc đều âm với m lẻ tức là:

$$(-1)^m \Delta_j(M_0; \lambda_0) > 0 \quad \forall j = \underbrace{2m+1,\ ...\ , m+n-1, m+n}_{(n-m)\text{ chỉ số}}$$

thì M_0 là điểm *cực tiểu tương đối*.

2) Nếu (n − m) tử thức chính sau cùng của H_A tại M_0 có tính *đan dấu* và tử thức thứ (2m + 1) âm khi m chẵn, dương khi m lẻ, tức là:

$$(-1)^{j-m} \Delta_j(M_0; \lambda_0) > 0 \quad \forall j = \underbrace{2m+1,\ ...\ , m+n-1, m+n}_{(n-m)\text{ chỉ số}}$$

thì M_0 là điểm *cực đại tương đối*.

3) Nếu ma trận $H_A(M_0; \lambda_0)$ là *bán xác định dương*, tức là:

$$(-1)^m \Delta_j(M_0; \lambda_0) \geq 0;$$

hoặc *bán xác định âm*, tức là:

$$(-1)^{j-m} \Delta_j(M_0; \lambda_0) \geq 0;$$

với: $\forall j = \underbrace{2m+1, \ \dots \ , m+n-1, m+n}_{(n-m) \text{ chỉ số}}$ thì ta chưa thể kết luận M_0 là điểm cực trị hay không. Gặp trường hợp này, ta phải tìm *phương pháp khác* để xác định cực trị.

4) Nếu ma trận H_A không rơi vào ba trường hợp trên thì ta nói H_A là *không xác định* tại M_0 và điểm dừng này *không thể là điểm cực trị*.

5. Các quy tắc khảo sát hàm một biến

a) Quy tắc I (để xét chiều biến thiên và cực trị)

x		x_0	
y'	−	0 ǁ	+
y	↘	y_{CT}	↗

x		x_0	
y'	+	0 ǁ	−
y	↗	$y_{CĐ}$	↘

Chú ý là hàm f(x) phải: liên tục trong khoảng (a, b) chứa *điểm tới hạn* x_0, có đạo hàm f'(x) hữu hạn trong miền $a < x < x_0$ và $x_0 < x < b$ và f'(x) phải đổi dấu khi x chuyển qua x_0, thì chiều biến thiên và cực trị của f(x) được xét như ở bảng trên.

Điều kiện cần và đủ để f(x) đồng (nghịch) biến trên (a; b) là:

$$f(x) \geq 0 \ \left(f'(x) \leq 0\right) \ \forall x \in (a;\, b),$$

đẳng thức f'(x) = 0 không xảy ra trên một khoảng liên tục, mà chỉ có thể xảy ra tại một số điểm rời rạc trong (a; b).

b) Khảo sát tính lồi, lõm, tìm điểm uốn của đồ thị hàm số

+ Nếu $\forall x \in (a;\, b),\ f''(x) > 0$ thì hàm f(x) *lồi* (*Đồ thị quay bề lõm lên phía trên*) trên (a; b); Tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số trong (a; b) đều nằm *phía dưới* đồ thị.
+ Nếu $\forall x \in (a;\, b),\ f''(x) < 0$ thì hàm f(x) *lõm* (*Đồ thị quay bề lõm xuống phía dưới*) trên (a; b); Tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số trong (a; b) đều nằm *phía trên* đồ thị.
+ Điều kiện cần và đủ để f(x) lồi (lõm) trên (a; b) là:

$$f''(x) \geq 0 \ \left(f''(x) \leq 0\right) \ \forall x \in (a;\, b),$$

đẳng thức f''(x) = 0 không xảy ra trên một khoảng liên tục, mà chỉ có thể xảy ra tại một số điểm rời rạc trong khoảng này.

+ *Điểm uốn của đồ thị* (C): y = f(x) là điểm phân chia khoảng lồi lõm của (C), tiếp tuyến tại đó "xuyên qua" đồ thị hàm số. Tại điểm uốn, đạo hàm cấp hai của hàm được xét triệt tiêu hoặc không xác định, đồng thời qua $x = x_U$ đạo hàm cấp hai phải đổi dấu.

c) Quy tắc II (để tìm cực trị và từ đó suy ra chiều biến thiên)

Nếu hàm số f(x) có:

+ Đạo hàm tới cấp hai tại mọi x thuộc lân cận x_0,
+ $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$

thì f(x) đạt cực trị tại x_0 (*cực đại* khi $f''(x_0) < 0$, *cực tiểu* khi $f''(x_0) > 0$).

d) Quy tắc II tổng quát:

Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm liên tiếp đến cấp n trong khoảng $\left(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta\right)$ và tại điểm x_0:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ còn } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Khi đó:

+ Nếu n chẵn, f(x) đạt cực trị: *cực đại* khi $f^{(n)}(x_0) < 0$, *cực tiểu* khi $f^{(n)}(x_0) > 0$.
+ Nếu n lẻ, f(x) *không đạt cực trị* tại x_0.

Từ quy tắc II tổng quát, với n = 2 ta suy ra quy tắc II.

e) Giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số liên tục f(x) trên đoạn [a, b] có thể đạt hoặc tại điểm tới hạn, hoặc tại hai đầu mút a, b của đoạn đã cho. Nếu trong khoảng (a, b) hàm số f(x) có *cực trị duy nhất*, thì cực trị ấy chính là cực trị tuyệt đối của hàm số trên đoạn [a, b]. Nếu trong (a; b) có nhiều điểm cực trị thì sau khi so sánh các giá trị cực đại (tương đối) với f(a); f(b) ta sẽ có *giá trị lớn nhất*, ký hiệu $\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ hay $\underset{x\in[a;\,b]}{\text{GTLN}} f(x)$. Tương tự, sau khi so sánh các giá trị cực tiểu (tương đối) với f(a); f(b) ta sẽ có *giá trị nhỏ nhất* , ký hiệu $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ hay $\underset{x\in[a;\,b]}{\text{GTBN}} f(x)$.

Các quy tắc tìm cực trị hàm một biến vừa nêu trong mục 5 đều có thể suy trực tiếp từ nội dung các mục 1, 2, 3 ở phần này.

Chú ý cho phần 1.2.3.3:

+ Để tìm *cực trị tương đối có điều kiện* của một hàm nhiều biến, ta còn có thể tiến hành theo *cách loại dần ẩn số,* để đưa bài toán ban đầu về các bài toán có số biến ít hơn.
+ Để tìm *cực trị tuyệt đối* ta còn có thể áp dụng các *bất đẳng thức*.

1.2.3.4. Hình vi phân

1. Hình vi phân trong mặt phẳng

a) Độ cong C của một đường cong phẳng tại một điểm

Với đường cong phẳng:

+ có phương trình

$$y = y(x); \quad a \le x \le b;$$

$$C(x, y) = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

+ có phương trình

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad t_1 \le t \le t_2$$

$$C(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

+ có phương trình

$$r = r(\varphi); \quad \alpha \le \varphi \le \beta;$$

$$C(\varphi) = \frac{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Bán kính cong của đường cong tại M là:

$$R(M) = \frac{1}{C(M)}$$

Trường hợp $C(M) = 0$, ta nói bán kính cong $R(M) = \infty$.

Trên pháp tuyến của đường cong tại M hướng về phía lõm của đường cong (*pháp tuyến dương*), lấy điểm I sao cho $IM = R(M)$. Điểm I được gọi là *khúc tâm* (*tâm cong*) của đường cong đang xét ứng với điểm M. Đường tròn tâm I bán kính $IM = R(M)$ được gọi là *đường tròn chính khúc* (*mật tiếp*) của đường cong tại M.

Khi M di động trên đường cong L, tâm cong tương ứng với M sẽ vạch nên *đường túc bế T* của L. Khi đó, L được gọi là *đường thân khai của T*.

b) Hình bao của một họ đường cong phẳng phụ thuộc tham số.

+ Định nghĩa

Nếu mọi đường cong của họ đường L đều tiếp xúc với một đường cong (C) và ngược lại, mỗi điểm trên (C) đều là một tiếp điểm giữa (C) và một đường thuộc họ L thì ta nói (C) là *hình bao* của họ L.

+ Quy tắc tìm hình bao của họ đường cong phụ thuộc một tham số

Giả sử họ đường cong L có phương trình F(x, y, m) = 0 với m là tham số. Khử m trong hệ phương trình:

$$\begin{cases} F(x,y,m) = 0 \\ F'_m(x,y,m) = 0 \end{cases}$$

ta sẽ được một hệ thức $\Phi(x, y) = 0$. Loại bỏ đi những điểm kì dị (nếu có) của họ L (tức là những điểm tại đó $F'_x(x,y,m) = F'_y(x,y,m) = 0$) cũng thỏa mãn hệ thức tìm được này, ta sẽ có phương trình của hình bao họ L.

2. Hình vi phân trong không gian

a) Độ cong C của một đường cong ghềnh tại một điểm

Với đường cong trong không gian (còn gọi là đường cong ghềnh):

+ có phương trình tham số:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t);\quad t_1 \le t \le t_2;$$

$$C(t) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

+ có *phương trình tự hàm*:

$$x = x(s);\ y = y(s);\ z = z(s);\quad s_A \le s \le s_B$$

với s là *toạ độ tự nhiên* xác định trên đường cong *AB*;

$$C(s) = \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}$$

b) Tiếp tuyến và pháp diện của một đường cong tại một điểm

Giả sử phương trình đường cong L được cho theo tham số:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t);\quad t_1 \le t \le t_2$$

Khi đó, *phương trình tiếp tuyến* của L tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ứng với $t = t_0$ có dạng:

$$\frac{X - x_0}{x'(t_0)} = \frac{Y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{Z - z_0}{z'(t_0)}$$

với: $\left(x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0) \ne 0\right)$;

còn *phương trình pháp diện* của L tại điểm $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ ứng với $t = t_0$ có dạng:

$$x'\left(t_0\right))\left(X - x_0\right) + y'\left(t_0\right)\left(Y - y_0\right) + z'\left(t_0\right)\left(Z - z_0\right) = 0$$

với: $\left(x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0) \neq 0\right)$.

c) Pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong tại một điểm

Giả sử phương trình mặt cong S trong không gian là

$$F\left(x,y,z\right) = 0.$$

Khi đó, *phương trình pháp tuyến* của S tại điểm $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ có dạng:

$$\frac{X - x_0}{F'_x\left(M_0\right)} = \frac{Y - y_0}{F'_y\left(M_0\right)} = \frac{Z - z_0}{F'_z\left(M_0\right)}$$

với: $\left(F_x'^2\left(M_0\right) + F_y'^2\left(M_0\right) + F_z'^2\left(M_0\right) \neq 0\right)$;

còn *phương trình tiếp diện* của S tại điểm $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ có dạng:

$$F_x'\left(M_0\right)\left(X - x_0\right) + F_y'\left(M_0\right)\left(Y - y_0\right) + F_z'\left(M_0\right)\left(Z - z_0\right) = 0$$

với: $\left(F_x'^2\left(M_0\right) + F_y'^2\left(M_0\right) + F_z'^2\left(M_0\right) \neq 0\right)$

1.2.4. Phép tính tích phân

1.2.4.1. Tích phân bất định

1. Các định nghĩa

Nếu $\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ dF(x) = f(x)dx \end{cases} \quad \forall x \in X \subset \Re$

thì $\int f(x)dx = F(x) + C$,

trong đó:

F(x) - một nguyên hàm của f(x) trên tập X;

C - hằng số tùy ý.

Tích phân bất định của f(x)dx là tập hợp tất cả các nguyên hàm của hàm f(x) (*họ nguyên hàm* sai khác nhau một hằng số cộng) trên tập X.

Nếu hàm f(x) liên tục trên tập X thì họ nguyên hàm của nó luôn tồn tại.

2. Một số tính chất và quy tắc đơn giản

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad \forall x \in X$

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \qquad \forall x \in X$

3) $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C \qquad \forall x \in X$

4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx + C \quad (k = \text{const})$

5) $\int \left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$

6) $\int udv = uv - \int vdu$ (công thức *tích phân từng phần*)

7) $\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$

$x = \varphi(t)$ (công thức *đổi biến số*)

3. Các tích phân cơ bản

1) $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C \qquad (m \neq -1)$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\int e^x dx = e^x dx + C$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad (0 < a \neq 1)$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg} x + C$

9) $\int \text{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

10) $\int \text{cotg} x dx = \ln|\sin x| + C$

11) $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

12) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

13) $$\int \frac{dx}{\left(a^2 \pm x^2\right)^n} = I_n$$

tính theo công thức truy hồi:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{\left(a^2 \pm x^2\right)^n} + (2n-1) I_n \right]$$

14) $$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{2ax + b + \sqrt{\Delta}} \right| + C$$

với: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

15) $$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} + C$$

với: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

16) $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

17) $$\int e^x \left[f(x) + f'(x) \right] dx = e^x f(x) + C$$

18) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

19) $$\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x \right) + C$$

20) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

21) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

1.2.4.2. Tích phân xác định

1. Định nghĩa

Tích phân xác định của $f(x)dx$ trên $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

với điều kiện là giới hạn ở vế phải tồn tại (xác định, hữu hạn) với mọi cách chia [a; b] thành n đoạn nhỏ tùy ý và với mọi cách chọn c_i trên đoạn con thứ i, có độ dài Δx_i. Khi đó, hàm f(x) được gọi là *khả tích* trên [a; b]. Có thể chứng minh được là mọi hàm *liên tục trên một đoạn kín* (*trừ ra một số hữu hạn điểm gián đoạn loại I, nếu có*) *luôn khả tích* trên đoạn này.

2. Một số tính chất và công thức cơ bản

1) Công thức Niu-tơn & Lai-nit:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

trong đó F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a;b].

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Cộng tính)

4) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k = const)

5) $\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$

Các tính chất 4), 5) thể hiện *tính chất tuyến tính* của tích phân xác định.

6) Nếu $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a;b]$

thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ (Tính bảo toàn thứ tự).

Từ tính chất này, ta có:

Nếu $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;b]$

thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

7) Công thức trung bình tích phân

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx$$

với f(x) và $\varphi(x)$ liên tục trên đoạn [a, b] và $\varphi(x)$ không đổi dấu trên đoạn đó; $a < \xi < b$ (Người ta gọi ξ là một *giá trị trung bình* trong (a; b)).

Trường hợp $\varphi(x) \equiv 1$ trên [a, b]:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

được gọi là *giá trị trung bình tích phân* của hàm $f(x)dx$ trên $[a;b]$.

8) $$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$ (Công thức *tích phân từng phần*)

9) $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$ (Công thức *đổi biến số* $x = \varphi(t)$)

10) Đạo hàm của tích phân xác định theo cận trên:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

3. Diện tích hình phẳng

a) *Hình thang cong* (D) giới hạn bởi các đường trong hệ tọa độ Đềcác vuông góc (xOy):

$$\begin{cases} x = a; & x = b > a; \\ y = f_1(x); & y = f_2(x) \end{cases}$$

có diện tích

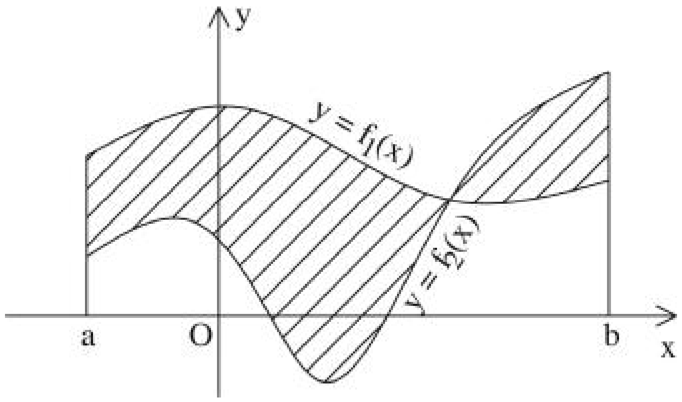
$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx \qquad \text{(Hình 1.2.1).}$$

b) Hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường trong *hệ tọa độ cực*:

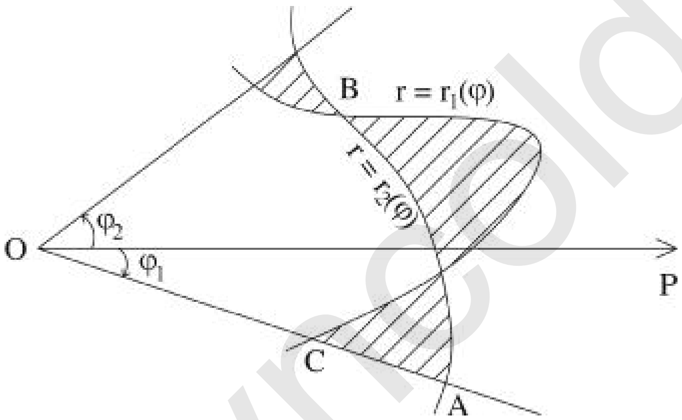
$$\begin{cases} \varphi = \varphi_1; & \varphi = \varphi_2 > \varphi_1; \\ r = r_1(\varphi); & r = r_2(\varphi) \end{cases}$$

có diện tích

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |r_1^2(\varphi) - r_2^2(\varphi)|d\varphi \qquad \text{(Hình 1.2.2).}$$



Hình 1.2.1



Hình 1.2.2

4. Thể tích vật thể

a) Vật thể nằm theo trục x $(a \le x \le b)$ có diện tích thiết diện vuông góc với trục Ox tại x là S(x) sẽ có thể tích tính theo công thức:

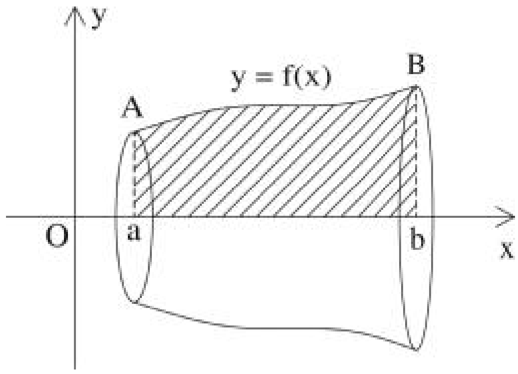
$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

b) Vật thể *tròn xoay*, tạo bởi hình thang cong (D):

$$\begin{cases} a \le x \le b; \\ y = 0; \\ y = f(x) \end{cases}$$

quay quanh *trục O*x có thể tích tính theo công thức:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \qquad \text{(Hình 1.2.3).}$$



Hình 1.2.3

c) Vật thể *tròn xoay*, tạo bởi hình thang cong (D):

$$\begin{cases} 0 \le a \le x \le b; \\ y = 0; \\ y = f(x) \ge 0 \end{cases}$$

quay quanh *trục Oy* có thể tích tính theo công thức:

$$V_y = 2\pi\int_a^b xydx = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

Cũng có thể tính V_y theo công thức ở mục b) sau khi đổi vai trò: x là hàm của biến y (Hàm ngược của hàm y = f(x) (nếu có)).

5. Một số ứng dụng khác của tích phân xác định

a) Độ dài đường cong phẳng $\widetilde{AB}$

+ có phương trình $y = y(x);\ \ a \le x \le b$ là:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

+ có phương trình $x = x(t);\ y = y(t);\ \ t_1 \le t \le t_2$ là:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$

+ có phương trình $r = r(\varphi);\ \ \alpha \le \varphi \le \beta$ là:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$$

b) Diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường cong phẳng có phương trình:

$$y = y(x) \geq 0;\ (a \leq x \leq b)$$

quay một vòng xung quanh trục Ox là:

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

c) Công của một lực biến đổi $F = F(x)$ có phương *Ox* khi điểm đặt của lực di chuyển từ $x = a$ đến $x = b$ là:

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

d) Khối lượng m của vật không đồng chất có hàm mật độ:

$$\rho = \rho(x);\ \ (a \leq x \leq b)$$

được tính theo các công thức sau:

+ Đường cong với phương trình $y = y(x)$ có:

$$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$$

+ Tấm phẳng hay mặt cong S có:

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dS(x)$$

($dS(x)$ là vi phân diện tích phụ thuộc theo x trên S).

+ Vật thể V có:

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dV(x)$$

($dV(x)$ là vi phân thể tích phụ thuộc theo x trên V).

e) Áp lực chất lỏng có mật độ ρ *không đổi* lên một mặt S nhúng trong chất lỏng từ độ sâu a đến độ sâu b (a < b) được tính theo công thức:

$$P = \int_a^b \rho x\,dS(x)$$

($dS(x)$ là diện tích dải hẹp ở độ sâu x trên mặt S).

6. Tính gần đúng tích phân xác định

a) Dùng chuỗi hàm lũy thừa

Khai triển hàm dưới dấu tích phân thành chuỗi lũy thừa. Do chuỗi hàm lũy thừa luôn *hội tụ đều* trong miền hội tụ của nó, ta có thể tích phân theo từng số hạng của chuỗi trên [a; b] *nằm trong miền hội tụ* và đánh giá được sai số của phép tính gần đúng.

b) Dùng công thức hình chữ nhật

Chia [a; b] thành n đoạn nhỏ bằng nhau, nhờ các điểm chia:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

khi đó: $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{n/2}\right)$$

trong đó: $y_{k/2} = f\left(\dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

c) Dùng công thức hình thang

Chia [a; b] thành n đoạn nhỏ bằng nhau, như ở mục b) và tính:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

trong đó:

$y_k = f(x_k)$; $(k = 0, 1, \ldots, n)$

Sai số $\delta < \dfrac{(b-a)^3 M}{12n^2}$;

$M = \max\limits_{x \in [a;b]} \left|f''(x)\right|$.

d) Dùng công thức parabôn (Công thức Sympsơn)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right)\right]$$

trong đó:

$y_k = f(x_k)$; $(k = 0, 1, \ldots, n)$

Sai số $\delta < \dfrac{(b-a)^5 M}{180n^4}$;

$M = \max\limits_{x \in [a;b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

1.2.4.3. Tích phân suy rộng

1. Tích phân với cận vô hạn (Tích phân suy rộng loại I)

a) Các định nghĩa tích phân suy rộng loại I

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

Nếu các giới hạn ở vế phải tồn tại thì tích phân suy rộng tương ứng ở vế trái là *hội tụ*; Ngược lại, nếu một trong các giới hạn ấy không tồn tại thì tích phân suy rộng ở vế trái tương ứng là *phân kỳ*. Ngoài ra, hàm f(x) phải liên tục trên bất kì đoạn kín nào nằm trong miền lấy tích phân được xét.

b) Các tiêu chuẩn so sánh đối với tích phân suy rộng loại I

Xét hai tích phân suy rộng loại I:

$$I_f = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

và

$$I_g = \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

trong đó: f(x), g(x) là hai hàm liên tục trên $[a, +\infty)$.

+ Tiêu chuẩn I:

Với giả thiết là: $f(x) \le Ag(x)\ \ \forall x \ge a;\ A = \text{const} > 0$, nếu I_g hội tụ thì I_f cũng hội tụ, còn nếu I_f phân kỳ thì I_g cũng phân kỳ.

+ Tiêu chuẩn II:

Với f(x) và g(x) là hai *vô cùng bé cùng bậc* trong quá trình $x \to +\infty$ (nghĩa là: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k$ (khác 0 và hữu hạn)) thì I_f và I_g sẽ *cùng hội tụ* hoặc *cùng phân kỳ*.

Người ta thường so sánh các tích phân suy rộng loại I với

$$I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Dùng định nghĩa có thể chứng minh được: I hội tụ khi $\alpha > 1$ và I phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

2. Tích phân của hàm không bị chặn (Tích phân suy rộng loại II)

a) Các định nghĩa

Giả sử hàm số f(x) có gián đoạn loại hai (gián đoạn vô hạn) tại điểm x_0 ($a \le x_0 \le b$), khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \qquad (a < x_0 < b)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (x_0 = a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (x_0 = b)$$

Để tích phân suy rộng ở vế trái *hội tụ*, các giới hạn tương ứng ở vế phải phải tồn tại; ngược lại, nếu ít nhất một trong các giới hạn đó không tồn tại thì tích phân tương ứng *phân kỳ*.

b) Các tiêu chuẩn so sánh đối với tích phân suy rộng loại II

Xét hai tích phân suy rộng loại II:

$$I_f = \int_a^b f(x)dx$$

và

$$I_g = \int_a^b g(x)dx$$

trong đó: f(x), g(x) là hai hàm liên tục trên $[a,b]\setminus\{x_0\}$ và có gián đoạn vô hạn tại x_0.

+ Tiêu chuẩn I:

Với giả thiết là: $f(x) \le Ag(x)\quad \forall x \in [a;b];\ A = const > 0$, nếu I_g hội tụ thì I_f cũng hội tụ, còn nếu I_f phân kỳ thì I_g cũng phân kỳ.

+ Tiêu chuẩn II:

Với f(x) và g(x) là hai *vô cùng lớn cùng bậc* trong quá trình $x \to x_0$ (nghĩa là: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = k$ (khác 0 và hữu hạn)) thì I_f và I_g sẽ *cùng hội tụ* hoặc *cùng phân kỳ*.

Người ta thường so sánh các tích phân suy rộng loại II với:

$$J_1 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} \quad (x_0 = b)$$

hoặc $$J_2 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (x_0 = a).$$

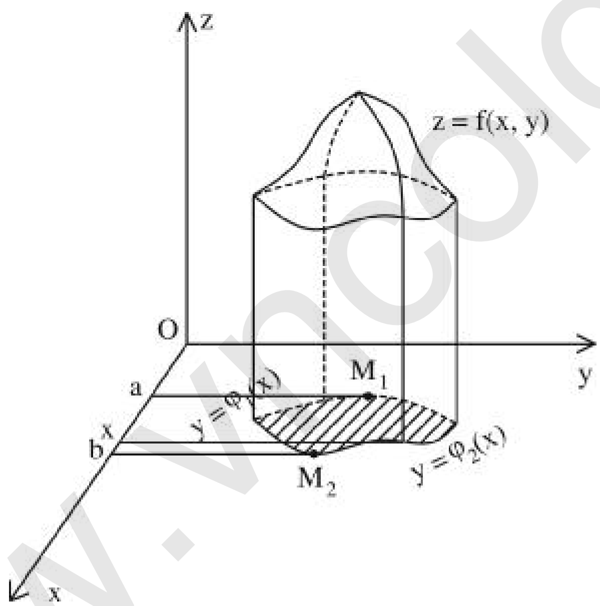
Dùng định nghĩa có thể chứng minh được: J_1, J_2 hội tụ khi $\alpha < 1$ và I phân kỳ khi $\alpha \geq 1$.

1.2.4.4. Tích phân bội

1. Tích phân hai lớp (Tích phân kép)

a) $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(Tích phân lặp, hình 1.2.4)



Hình 1.2.4

b) Công thức đổi biến số đối với tích phân hai lớp.

Với phép đổi biến:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

có định thức $$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

ta có công thức:

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \iint_\sigma f\left[x(u,v);\ y(u,v)\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv.$$

Chẳng hạn khi chuyển sang hệ tọa độ cực: $(r,\ \varphi)$ với:

$$x = r\cos\varphi;$$

$$y = r\sin\varphi,$$

thì $$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

và ta có:

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \iint_\sigma f\left[r\cos\varphi;\ r\sin\varphi\right]r\,dr\,d\varphi$$

Trong các công thức đổi biến trên, σ là ảnh của miền D trong phép đổi tương ứng.

c) Các ứng dụng của tích phân hai lớp

+ *Diện tích hình phẳng* D có giá trị bằng:

$$\iint_D dxdy = \iint_\sigma rdrd\varphi$$

+ *Thể tích hình trụ cong* giới hạn bởi mặt trụ có đường sinh vuông góc với (xOy), đáy là hình phẳng D nằm trong (xOy) và mặt cong có phương trình z = f(x, y) được tính theo công thức:

$$V = \iint_D \left|f(x,y)\right|dxdy$$

+ *Tọa độ trọng tâm* của hình phẳng:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dxdy;$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dxdy$$

trong đó:

ρ(x, y) - hàm mật độ;

m - khối lượng của hình phẳng, $m = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy$.

+ *Mômen quán tính* của một hình phẳng đối với gốc tọa độ:

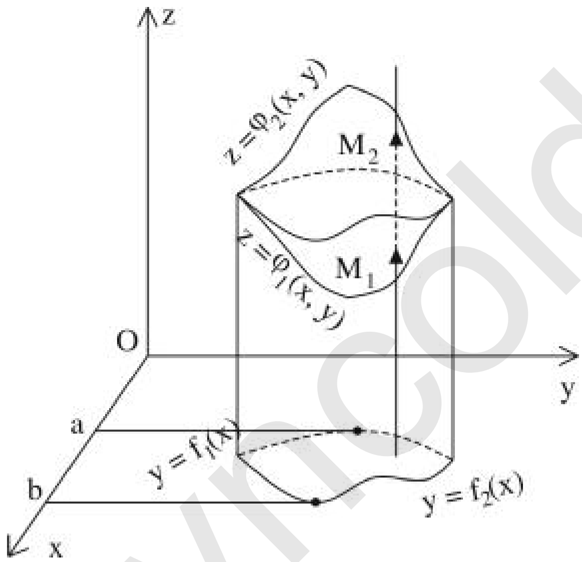
$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

2. Tích phân ba lớp (Tích phân bội ba)

a) Tích phân lặp:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \iint_{\sigma_x} f(x,y,z)\,dydz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \quad \text{(Hình 1.2.5)}$$



Hình 1.2.5

b) Công thức đổi biến số trong tích phân ba lớp:

$$\iiint_\Omega f(x;y;z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint_\omega f\left[x(u,v,w);y(u,v,w);z(u,v,w)\right]\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw$$

trong đó: ω là ảnh của miền Ω qua phép đổi biến: $(x,y,z) \to (u,v,w)$.

Chẳng hạn, nếu chuyển sang toạ độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

thì $$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}\right| = r.$$

Nếu chuyển sang toạ độ cầu:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

thì: $$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}\right| = r^2\sin\theta.$$

c) Các ứng dụng của tích phân ba lớp

+ Thể tích vật thể:

$$V = \iiint_V dxdydz$$

+ Tọa độ khối tâm của vật thể không đồng chất:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz$$

trong đó:

$m = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz$ là khối lượng của vật thể V;

$\rho(x,y,z)$ là hàm mật độ.

+ Mômen quán tính của vật thể đối với các trục tọa độ:

$$I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_y = \iiint_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

1.2.4.5. Tích phân đường

1. Tích phân đ- ờng loại I (Tích phân lấy theo độ dài cung)

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)ds$$

a) Với cung $\overset{\frown}{AB} \subset (xOy)$:

+ có phương trình: $y = y(x);\ a \le x \le b$;

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int_a^b f\left[x, y(x)\right]\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

+ có phương trình tham số: $x = x(t); y = y(t);\quad t_1 \le t \le t_2$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t)\right]\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

+ có phương trình $r = r(\varphi);\ \alpha \le \varphi \le \beta$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f\left[r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\right]\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$$

b) Với cung $\overset{\frown}{AB} \subset (xOyz)$ có phương trình $x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)\quad t_1 \le t \le t_2$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t); z(t)\right]\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

c) Tọa độ khối tâm của $\overset{\frown}{AB} \subset (xOyz)$ không đồng chất:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_{\overset{\frown}{AB}} x\rho(M))ds;$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_{\overset{\frown}{AB}} y\rho(M)\,ds;$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_{\overset{\frown}{AB}} z\rho(M)\,ds$$

với:

m - khối lượng của đường cong, $m = \int_{\overset{\frown}{AB}} \rho(M)\,ds$;

$\rho(M)$ - hàm mật độ.

2. Tích phân đ- ờng loại II (Tích phân đường lấy theo tọa độ)

a) Định nghĩa

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\overset{\frown}{AB}} \left\{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right\} ds$$

trong đó:

P, Q, R - các hàm của ba biến x, y, z;

cosα, cosβ, cosγ - ba hàm côsin chỉ hướng của tiếp tuyến đường cong hướng theo chiều đi từ A đến B. (Nếu lấy theo chiều ngược lại từ B đến A, tích phân đường loại II sẽ đổi dấu).

b) Với cung $\widetilde{AB} \subset (xOy)$:

+ có phương trình: $y = y(x);\ \ a \le x \le b$

$$\int_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left\{P\left[x,y(x)\right] + Q\left[x,y(x)\right]y'(x)\right\}dx$$

+ có phương trình tham số: $x = x(t);\ y = y(t);\ \ t_1 \le t \le t_2$

$$\int_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{P\left[x(t),y(t)\right]x'(t) + Q\left[x(t),y(t)\right]y'(t)\right\}dt$$

c) Với cung $\widetilde{AB} \subset (xOyz)$ có phương trình $x = x(t);\ y = y(t);\ \ z = z(t)\ \ \ t_1 \le t \le t_2$

$$\int_{\widetilde{AB}} P(x,y,z)dx = \int_{t_1}^{t_2} P\left[x(t),y(t),z(t)\right]x'(t)dt$$

Với các tích phân đường loại hai, lấy theo các biến y, z ta sẽ có các công thức tương tự.

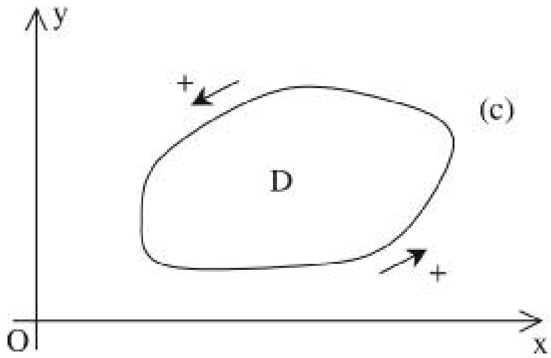
d) Trên một đường cong kín (L), ngoài cách tham số hóa (L) như ở mục c, tích phân đường loại hai còn được tính bằng cách chia (L) thành nhiều đường cong nhỏ, *trơn từng khúc* hoặc bằng *công thức Gơrin* (liên hệ giữa tích phân đường và tích phân hai lớp):

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó:

D - hình phẳng, giới hạn bởi đường cong kín C trơn từng khúc (chọn chiều của C sao cho đi theo chiều này, ta luôn thấy miền D ở phía bên trái);

P, Q - những hàm hai biến số x, y liên tục trên C cùng với các đạo hàm riêng liên tục trong D (hình 1.2.6).



Hình 1.2.6

e) Các ứng dụng của tích phân đường loại II

+ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong kín (C) được tính theo công thức:

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) = \oint_C xdy = -\oint_C ydx$$

tích phân lấy theo chiều dương của (C).

+ Công của một lực biến đổi $\vec{F}(M)$ có ba thành phần (toạ độ): (P, Q, R) khi điểm đặt của nó di chuyển trên $\overset{\frown}{AB}$ từ A đến B là:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\overset{\frown}{AB}} \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\} ds$$

+ Bốn mệnh đề tương đương

Giả thiết P, Q là các hàm hai biến x, y liên tục cùng các đạo hàm riêng của chúng trên miền phẳng $D \subset (xOy)$. Khi đó, trong miền D, bốn mệnh đề sau đây là tương đương:

1) Pdx + Qdy là một vi phân toàn phần của một hàm U(x, y) nào đó.

2) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

3) $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong kín (L) trơn từng khúc, nằm trọn trong D.

4) $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B.

1.2.4.6. Tích phân mặt

1. Tích phân mặt loại I (tích phân lấy theo diện tích mặt cong)

$$\iint_S f(M)dS$$

a) Với mặt cong S có phương trình là $z = z(x, y)$, gọi D là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng tọa độ xOy và $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, tích phân mặt loại I được tính theo công thức:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

b) $$\iint_S dS = \iint_S \sqrt{1+p^2+q^2}\,dS$$

có giá trị bằng *diện tích của mặt cong S*.

c) Tọa độ khối tâm của một mặt S không đồng chất:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(M)dS;$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(M)dS;$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(M)dS$$

với:

m - khối lượng của mặt cong S, $m = \iint_S \rho(M)dS$;

$\rho(M)$ - hàm mật độ.

2. Tích phân mặt loại II (Tích phân lấy theo tọa độ)

a) Định nghĩa

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_S \left[P(x,y,z)\cos(n,x) + Q(x,y,z)\cos(n,y) + R(x,y,z)\cos(n,z)\right]dS$$

trong đó:

S - mặt cong hai phía, trơn từng mảnh;

P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) - ba hàm số xác định trên mặt S;

$\vec{n}$ - vectơ pháp tuyến của S, hướng theo phía đã chọn trên S (người ta gọi S là *mặt định hướng*).

b) Công thức tính tích phân mặt loại II

$$\iint\limits_{S} R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint\limits_{D} R\left[x,y,\varphi(x,y)\right]dxdy$$

trong đó:

D - hình chiếu của S lên mặt phẳng tọa độ xOy;

z - phương trình của mặt S, $z = \varphi(x,y)$;

Chọn dấu (+) hay (–) trước tích phân hai lớp tùy theo cos(n, z) dương hay âm.

Ta cũng có thể tính tích phân mặt loại II bằng cách đưa về tích phân mặt loại I.

Chú ý là tích phân mặt loại II *sẽ đổi dấu* khi ta đổi phía chọn của mặt S.

c) Tích phân mặt loại II *trên một mặt S kín* có thể tính bằng các cách sau:

+ Chia S thành nhiều mặt cong trơn từng mảnh, sau đó áp dụng tính chất cộng tính.

+ Áp dụng công thức Ôxtrôgrátxki - Gauxơ

$$\oiint\limits_{S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

trong đó:

V - phần không gian bên trong, giới hạn bởi mặt kín S trơn từng mảnh (chọn pháp tuyến S hướng ra phía ngoài);

P, Q, R - những hàm ba biến số x, y, z liên tục trên S cùng với các đạo hàm riêng liên tục trong miền V kể cả biên.

d) Thể tích V của vật thể giới hạn bởi mặt cong kín S được tính theo công thức:

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

e) Công thức Xtốc (liên hệ giữa tích phân đường và tích phân mặt)

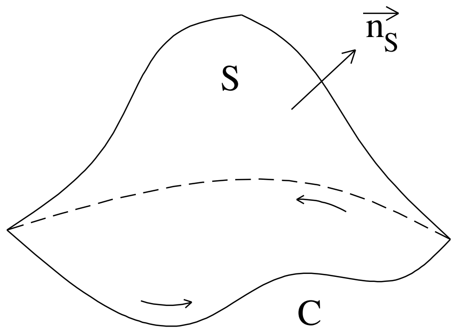
$$\oint\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx$$

trong đó:

P, Q, R - những hàm (của ba biến x, y, z) liên tục cùng với các đạo hàm riêng liên tục trên một mặt định hướng S, giới hạn bởi đường cong kín C.

Trong công thức này, cần chọn hướng mặt cong S và chiều trên C sao cho khi ta đứng theo chiều của vectơ pháp của S phải thấy chiều C ngược với chiều kim đồng hồ (hình 1.2.7).



Hình 1.2.7

Công thức Xtốc sẽ trở thành *công thức Gơrin* nếu C là một đường cong phẳng, kín trong mặt phẳng xOy và S là một miền phẳng giới hạn bởi C.

Chú ý cho các phần 1.2.4.4; 1.2.4.5; 1.2.4.6: Các *tích phân hai lớp , ba lớp, tích phân đường, tích phân mặt* đều có các tính chất giống như tích phân xác định (còn gọi là tích phân một lớp). Đó là các tính chất: *Cộng tính, Tuyến tính và Bảo toàn thứ tự.*

1.2.4.7. Lý thuyết trường

1. Tr- ờng vô h- ớng

a) Ta nói trên miền $\Omega \subset \Re^3$ có một *trường vô hướng* U nếu ứng với mỗi điểm $M \in \Omega$, ta có quy luật để xác định một giá trị u(M) của U. Hàm u(M) = u(x, y, z) được gọi là *hàm trường*. Nếu x, y, z đều không phải biến số chỉ thời gian, trường vô hướng được gọi là *trường dừng*. Nếu hàm trường phụ thuộc thời gian, trường vô hướng được gọi là *không dừng*.

b) *Mặt đẳng mức:* là tập hợp các điểm $M \in \Omega$ sao cho u(M) = C = const. Khi Ω là miền phẳng, tập các điểm M: u(M) = u(x, y) = C được gọi là *đường đồng mức*.

c) *Đạo hàm theo hướng* $\vec{a}$ của u(M) biểu thị *tốc độ biến thiên* của hàm u theo hướng này:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các cosin chỉ hướng của $\vec{a}$.

d) *Građiên* của trường u(M) tại điểm M(x, y, z) là vectơ:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Các tính chất của građiên:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, C = 0 \quad (C = \text{const})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(u + v) = \overrightarrow{\text{grad}}\, u + \overrightarrow{\text{grad}}\, v$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(uv) = u\,\overrightarrow{\text{grad}}\,v + v\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(u) = \varphi'(u)\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = ch_{\vec{a}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u \quad (\text{chiếu của } \overrightarrow{\text{grad}}\,u \text{ lên } \vec{a})$$

Tại mỗi điểm của một trường vô hướng, građiên luôn *trùng phương* với pháp tuyến của mặt mức của trường đi qua điểm ấy, đồng thời đạo hàm của hàm trường theo các hướng *vuông góc với građiên* (tức là tiếp xúc với mặt mức) luôn bằng 0.

2. Tr- ờng vectơ

a) Ta nói trên miền $\Omega \subset \Re^3$ có một *trường vectơ* $\vec{F}$ nếu ứng với mỗi điểm $M \in \Omega$, ta có quy luật để xác định một vectơ $\vec{F}(M)$. Hàm vectơ này được gọi là *hàm trường*.

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\,\vec{i} + F_y(x,y,z)\,\vec{j} + F_z(x,y,z)\,\vec{k}$$

b) *Đường dòng* của một trường vectơ $\vec{F}$ là một đường cong (C) nằm trong miền được xét sao cho tại mỗi điểm M trên đường, $\vec{F}(M)$ có phương tiếp xúc với (C). Tập hợp các đường dòng lập nên một *họ đường dòng* trong trường vectơ.

Hệ phương trình vi phân của đường dòng (C) trong trường $\vec{F}(M)$ là:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

c) *Thông lượng* của một trường vectơ $\vec{F}$ qua một mặt định hướng S là:

$$\Phi = \iint_S F_n\,dS = \iint_S F_x\,dydz + F_y\,dzdx + F_z\,dxdy$$

trong đó: $F_n = \vec{F}.\overrightarrow{n_0}$ là chiếu của $\vec{F}$ trên pháp tuyến $\vec{n}$ tại M(x, y, z), theo phía đã chọn trên S.

d) *Hoàn lưu (Lưu số)* của trường $\vec{F}$ dọc theo một đường cong kín (L):

$$C = \oint_L F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

e) *Đive* của trường $\vec{F}$ là một đại lượng vô hướng:

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

\+ Các tính chất của đive:

$$\text{div}\,\vec{C} = 0 \quad (\vec{C} \text{ là vectơ không đổi cả phương, chiều lẫn độ dài})$$

div

$$\operatorname{div}\left(u\vec{F}\right) = u \operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u \quad (u = u(x, y, z))$$

+ Theo ngôn ngữ của *lý thuyết trường, công thức Ôxtrôgrátxki - Gauxơ*:

mang một ý nghĩa cơ học là: *Thông lượng* của một trường vectơ $\vec{F}$ qua một mặt cong kín S (với pháp tuyến chọn hướng ra phía ngoài) bằng *tích phân ba lớp* của trên miền V giới hạn bởi mặt S.

f) *Rôta (vectơ xoáy)* của trường $\vec{F}$ là một vectơ:

$\vec{F}$ =

(Cách viết hình thức của *tích có hướng*, dùng định thức)

+ Các tính chất của rôta:

(C = const)

(u = u(x, y, z))

+ Theo ngôn ngữ của *lý thuyết trường, công thức Xtốc*:

=

=

mang một ý nghĩa cơ học là: *Hoàn lưu* của trường vectơ $\vec{F}$ dọc theo một đường cong kín C bằng *thông lượng* của $\vec{F}$ qua mặt S nào đó có biên là C (Chú ý chiều của C và phía của S phải phù hợp).

3. Tr- ờng thế

a) Định nghĩa

Trường vectơ $\vec{F}$ được gọi là *trường thế* trên miền Ω nếu tồn tại một trường vô hướng u(M) sao cho $M \in W$. Hàm u(M) được gọi là *hàm thế* (*hoặc thế vị*) *của trường* $\vec{F}$.

b) *Điều kiện cần và đủ* để trường $(M \in W)$ là một trường thế trên miền được xét là: $\vec{F} = \vec{0}$ tại mọi điểm Như vậy, trường thế là một trường không có xoáy.

4. Toán tử Lapơlaxơ và Toán tử Hamintơn

a) Toán tử Lapơlaxơ

= —— —— ——;

Với toán tử này:

= —— —— ——;

= —— —— ——

Trường vô hướng u(M) có được gọi là *trường điều hoà*.

b) Toán tử Hamintơn (Nabla):

— — — (vectơ tượng trưng)

Với toán tử này:

$\overrightarrow{grad}$ u = u;

=

c) Kết hợp hai toán tử Lapơlaxơ và Hamintơn, ta có:

đối với mọi trường.

1.2.5. Ph ơng trình vi phân th ờng

1.2.5.1. Các khái niệm cơ bản

1. Ph- ơng trình vi phân

Phương trình vi phân là một đẳng thức chứa các biến độc lập, hàm phải tìm của các biến đó cùng các đạo hàm (hoặc vi phân) của hàm này.

Phương trình vi phân thường là phương trình vi phân có hàm phải tìm chỉ chứa một biến độc lập.

Phương trình vi phân đạo hàm riêng (hay *Phương trình vật lý - toán*) là phương trình vi phân chứa hàm phải tìm là hàm của nhiều biến độc lập và các đạo hàm riêng của nó.

Cấp của một phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình.

Dạng tổng quát của phương trình vi phân thường cấp n:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1.2.1)$$

trong đó: y = y(x) là hàm phải tìm xác định trên một tập X nào đó trong $\Re$.

2. Nghiệm của ph- ơng trình vi phân

Nghiệm của (1.2.1) là một hàm y = φ(x) khả vi đến cấp n trên X sao cho phương trình trở thành một đẳng thức đúng, khi thay y bởi φ(x).

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (1.2.1) là một hàm khả vi đến cấp n trên X và phụ thuộc *n hằng số tùy ý* $C_1,..., C_n$: $y = \varphi(x, C_1,..., C_n)$ sao cho với mọi $C_1,..., C_n$ phương trình trở thành một đẳng thức đúng , khi thay y bởi $\varphi(x, C_1,..., C_n)$.

Với mỗi bộ n số cụ thể gán cho $C_1,..., C_n$ trong nghiệm tổng quát, ta có *một nghiệm riêng* của (1.2.1). Đôi khi, ngoài các nghiệm tổng quát, phương trình vi phân còn có các *nghiệm kỳ dị*, đó là các nghiệm của (1.2.1) nhưng không phải nghiệm riêng (nghĩa là ta không thể gán cho nghiệm tổng quát bất cứ một bộ n số cụ thể $C_1,..., C_n$ nào (ngay cả khi gán các số vô hạn) để suy ra được nghiệm kỳ dị).

Trong nhiều trường hợp ta chỉ có thể tìm được một hệ thức $\Phi(x, y, C_1,..., C_n) = 0$, trong đó chứa *hàm ẩn* $y = \varphi(x, C_1,..., C_n)$ thỏa mãn (1.2.1) $\forall x \in X$ và ta gọi hệ thức này là một *tích phân tổng quát* của phương trình. Với mỗi bộ n số cụ thể gán vào $C_1,..., C_n$ trong tích phân tổng quát, ta có *một tích phân riêng* của (1.2.1).

3. Bài toán Cauchy

Bài toán được phát biểu cho phương trình (1.2.1) như sau:

Tìm một nghiệm riêng hoặc một tích phân riêng của phương trình thoả mãn hệ n điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'; \quad y''(x_0) = y_0'';...; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

với $y_0; y_0'; y_0'';...; y_0^{(n-1)}$ là các số cho trước.

4. Tích phân (hoặc giải) một ph- ơng trình vi phân là tìm nghiệm tổng quát, hoặc tích phân tổng quát; tìm nghiệm riêng hoặc tích phân riêng thỏa mãn n điều kiện cho trước; tìm nghiệm kỳ dị (nếu có) hoặc chứng tỏ rằng phương trình vô nghiệm. Độc giả quan tâm đến *vấn đề tồn tại và duy nhất nghiệm* của (1.2.1) có thể tìm đọc các tài liệu chuyên khảo.

1.2.5.2. Phương trình vi phân cấp một

1. Ph- ơng trình vi phân th- ờng cấp một

Phương trình có dạng:

$$F(x, y, y') = 0$$

hoặc
$$y' = f(x, y) \qquad (1.2.2)$$

với $y = y(x)$ là hàm phải tìm.

Nghiệm tổng quát của (1.2.2): $y = \varphi(x, C)$ sẽ được biểu diễn bởi một họ đường cong phụ thuộc tham số C trong mặt phẳng xOy. Đây là *họ đường cong tích phân* của phương trình được xét. Mỗi đường cong của họ, ứng với một giá trị cụ thể của C cho ta một *đường cong tích phân* của (1.2.2).

Bài toán Cauchy đối với (1.2.2) sẽ mang một ý nghĩa hình học đơn giản là: Tìm một đường cong tích phân của phương trình đi qua một điểm $(x_0; y_0)$ cho trước.

Nghiệm kỳ dị của (1.2.2) (nếu có) sẽ biểu diễn bởi một đường cong, tiếp xúc với cả họ đường cong tích phân, đó chính là *hình bao* của họ này.

Người ta chứng minh rằng: Phương trình: $y' = f(x, y)$ với vế phải liên tục trên một miền D nào đó chứa điểm $(x_0; y_0)$ luôn có nghiệm thoả mãn điều kiện: $y(x_0) = y_0$ và nếu đạo hàm riêng theo biến y: $f'_y(x, y)$ cũng liên tục trên D thì nghiệm này sẽ là duy nhất.

2. Phân loại và Nguyên tắc chung để giải một số ph- ơng trình vi phân cấp một

a) *Phương trình có biến số phân ly* là phương trình vi phân cấp 1 có thể đưa về dạng:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

hoặc tổng quát hơn:

$$P_1(x)\, Q_1(y)dx + P_2(x)\, Q_2(y)dy = 0,$$

trong đó:

P, Q, P_1, Q_1 - các hàm liên tục đã biết;

$y = y(x)$ hoặc $x = x(y)$ - hàm phải tìm.

Tích phân tổng quát của các phương trình trên lần lượt là:

$$+ \qquad = C$$

$$\text{——} \qquad \text{——} \qquad = C$$

(C là hằng số tùy ý). (Khi giải, còn phải xét các trường hợp và).

b) *Phương trình vi phân đẳng cấp* là phương trình có thể đưa về dạng:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

trong đó M và N là hai hàm đẳng (cùng) cấp k đối với x, y, tức là:

$$M(tx, ty) = t^k M(x, y);$$

$$N(tx, ty) = t^k N(x, y)$$

với t là tham số; k nguyên dương.

Cách giải:

Để tìm y = y(x, C) thoả mãn phương trình trên, ta đặt y = xu(x) với u(x) là hàm mới phải tìm.

Khi đó:

$$dy = udx + xdu,$$

hay là: $$y' = u(x) + x\,u'(x).$$

Phương trình đẳng cấp sẽ đưa được về *phương trình biến số phân ly* cho hàm u(x).

Đôi khi, ta có thể đưa một số phương trình vi phân cấp một *không phải dạng đẳng cấp* về dạng đẳng cấp bằng cách *đổi biến* hoặc dùng *hàm phụ* thích hợp.

c) *Phương trình vi phân tuyến tính cấp một* là phương trình có thể đưa về dạng:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

với:

y - hàm phải tìm, y = y(x);

P(x) và Q(x) - hai hàm cho trước.

Khi Q(x) ≡ 0 ∀x, ta có *phương trình vi phân tuyến tính cấp một thuần nhất* và *nghiệm tổng quát* của nó có thể tìm theo cách phân ly biến số:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} + c$$

Trường hợp Q(x) ≠ 0, nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

Trong thực hành, ta có thể tìm được nghiệm tổng quát trên theo các bước sau đây:

1) Tìm *một nghiệm* của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với phương trình đã cho:

2) Tính

3) *Nghiệm tổng quát* cần tìm sẽ là:

d) *Phương trình vi phân Béc-nu-li* (*Bernoulli*) là phương trình có thể đưa về dạng:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

với:

y - hàm phải tìm, y = y(x);

P(x) và Q(x) - hai hàm cho trước;

α - một số thực bất kỳ khác 0 và khác 1

khi $\alpha = 0$, ta có phương trình tuyến tính,

khi $\alpha = 1$, ta có phương trình tuyến tính thuần nhất.

Nhận thấy phương trình Béc-nu-li luôn có nghiệm tầm thường là

$$y(x) \equiv 0 \ \forall x,$$

ta xét trường hợp $y(x) \neq 0$ và đặt z(x) = là hàm mới phải tìm. Khi đó ta sẽ nhận được một phương trình vi phân tuyến tính đối với z(x):

Sau khi tìm được z(x), ta dễ dàng tìm được nghiệm $y(x) \neq 0$.

e) *Phương trình vi phân toàn phần* là phương trình có thể đưa về dạng:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

với:

y - hàm phải tìm, y = y(x);

P(x) và Q(x) - hai hàm cho trước thỏa mãn điều kiện:

hay là $\quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$

(Vi phân toàn phần của một hàm hai biến U (xem *Bốn mệnh đề tương đương* ở mục 1.2.4.5 điểm 2, e)).

Tích phân tổng quát của phương trình vi phân toàn phần:

$$U(x, y) = C$$

với:

C - hằng số tùy ý;

U(x, y) cho bởi một trong hai biểu thức sau:

(có thể chọn x_0; y_0 tuỳ ý, miễn là (x_0, y_0) thuộc miền liên tục của hai hàm P; Q).

1.2.5.3. Phương trình vi phân cấp hai

Xét phương trình

$$F(x, y', y'') = 0$$

hay $$y''(x) = f(x, y, y')$$

với điều kiện:

$$y(x_0) = y_0;$$

$$y'(x_0) = y_0'.$$

Nếu hàm f(x, y, y') liên tục trên một miền Ω nào đó chứa điểm (x_0, y_0, y_0') thì trên miền đó tồn tại nghiệm riêng y = y(x) thoả mãn hai điều kiện được xét. Nếu hàm f(x, y, y') còn có các đạo hàm riêng theo y và theo y' liên tục trên miền □ thì nghiệm nói trên tồn tại duy nhất.

1. Ph- ơng trình vi phân cấp hai giảm cấp đ- ợc

Có *ba trường hợp* giảm cấp được:

a) Vắng mặt y; y' trong phương trình

Khi đó, chỉ cần tích phân hai lần hai vế phương trình y''(x) = f(x) ta sẽ được:

b) Vắng mặt y trong phương trình

Khi đó, đặt

$$y'(x) = z(x)$$

là hàm mới phải tìm (y''(x) = z'(x)); phương trình y''(x) = f(x, y') trở thành:

$$z'(x) = f(x, z)$$

là một phương trình vi phân cấp một. Giả sử phương trình này có nghiệm

$$z = \varphi(x, C_1),$$

thì từ đó, ta có:

c) Vắng mặt x trong phương trình

Khi đó, đặt

$$y'(x) = P(y)$$

là hàm mới phải tìm theo biến y, (y''(x) = P(y)P'(y)); phương trình y''(x) = f(y, y') trở thành:

$$P(y)P'(y) = f(y, P(y))$$

là một phương trình vi phân cấp một. Giả sử phương trình này có nghiệm

$$P = P(y; C_1),$$

thì từ đó, ta có tích phân tổng quát:

2. Ph- ơng trình vi phân cấp hai tuyến tính

a) Phương trình vi phân cấp hai tuyến tính là phương trình có dạng

$$y''(x) + P(x)\,y'(x) + Q(x)\,y(x) = R(x),$$

trong đó:

y - hàm phải tìm, y = y(x);

P, Q, R - ba hàm cho trước.

Khi $R(x) \equiv 0\ \forall x$, ta có phương trình vi phân tuyến tính cấp hai *thuần nhất tương ứng* với phương trình đang xét.

b) Tính chất nghiệm của phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất

+ Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình, thì $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng sẽ thoả mãn phương trình với mọi C_1, C_2.

+ Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là *hai nghiệm độc lập* của phương trình (tức là $y_1(x) \neq k\,y_2(x)$ với k là hằng số) thì

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

với C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý sẽ là *nghiệm tổng quát* của phương trình.

+ Khi biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình, ta có thể tìm một nghiệm riêng khác độc lập với $y_1(x)$ bằng *công thức Liu-vin*:

c) Tính chất nghiệm của phương trình vi phân cấp hai tuyến tính không thuần nhất ($R(x) \neq 0$)

+ Nếu

là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, còn là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất, thì *nghiệm tổng quát* của nó là

+ Hiệu hai *nghiệm riêng* của phương trình không thuần nhất là một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng.

d) Phương pháp biến thiên hằng số cho phương trình vi phân cấp hai

Nếu

là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, thì nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất sẽ là:

với $C_1(x)$ và $C_2(x)$ được xác định từ hệ phương trình sau (sai khác hai hằng số tùy ý C_1, C_2):

3. Ph- ơng trình vi phân cấp hai tuyến tính với hệ số hằng số

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = R(x) \quad \text{(p, q là hai hằng số thực).}$$

a) Phương trình bậc hai theo k:

$$k^2 + pk + q = 0$$

được gọi là *phương trình đặc trưng* (*đặc tính*) của phương trình vi phân đang xét. Tùy theo nghiệm của phương trình đặc trưng (PTĐT), ta có thể tìm ngay được nghiệm tổng quát (NTQ) của phương trình thuần nhất tương ứng (PTTN):

Nghiệm của PTĐT	NTQ của PTTN: