

Chương 2

CƠ KẾT CẤU

2.1. NGOẠI LỰC, NỘI LỰC, ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

2.1.1. Ngoại lực

1. Định nghĩa

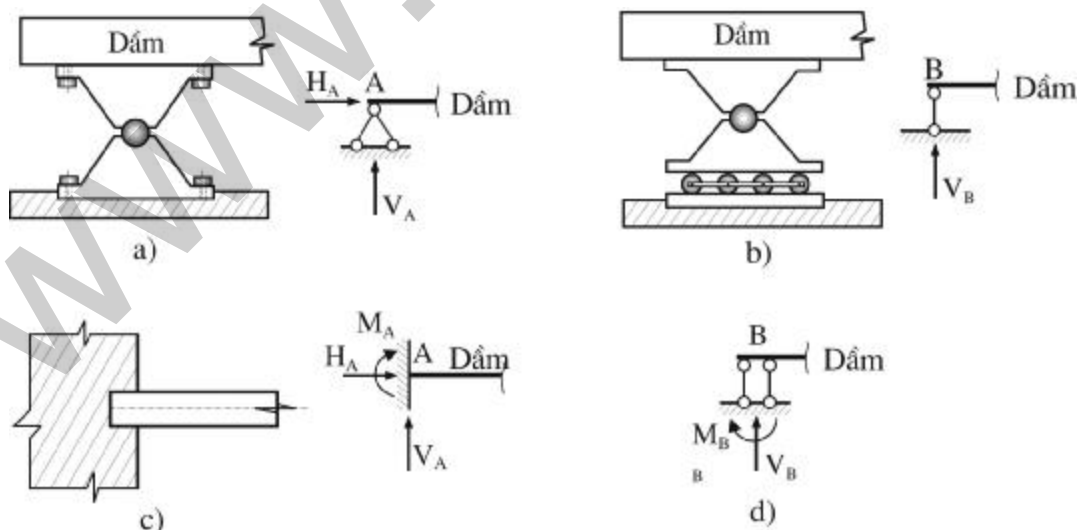
Ngoại lực là lực tác dụng từ một vật thể nào đó hoặc từ môi trường xung quanh lên vật thể đang xét.

Ngoại lực bao gồm tải trọng và phản lực. Tải trọng là lực tác dụng lên vật thể mà đã biết trị số, phương chiều và điểm đặt.

2. Liên kết và phản lực liên kết

Trong kết cấu công trình thường sử dụng nhiều loại liên kết. Dưới tác dụng của tải trọng hoặc các tác động bên ngoài khác, tại các liên kết xuất hiện phản lực liên kết. Dưới đây điếm qua một số liên kết và phản lực liên kết tương ứng thường gặp:

- + Liên kết đôi (khớp đôi) và phản lực của nó (hình 2.1.1.a).
- + Liên kết đơn (khớp đơn) và phản lực của nó (hình 2.1.1.b).
- + Liên kết ngàm và phản lực của nó (hình 2.1.1.c).
- + Liên kết ngàm trượt và phản lực của nó (hình 2.1.1.d).



Hình 2.1.1: Liên kết và phản lực liên kết

3. Phân loại tải trọng

+ Theo tính chất tác dụng:

Tải trọng được phân thành tải trọng tĩnh và tải trọng động. Tải trọng tĩnh tác dụng lên vật thể không gây ra lực quán tính, ngược lại tải trọng động tác dụng lên vật thể gây ra lực quán tính.

+ Theo phương pháp truyền lực:

Tải trọng được phân thành tải trọng phân bố và tải trọng tập trung. Tải trọng phân bố là tải trọng truyền từ vật thể này sang vật thể khác qua một diện tích tiếp xúc, còn tải trọng tập trung chỉ truyền qua một điểm tiếp xúc. Tải trọng phân bố lại được chia ra thành:

- Tải trọng phân bố thể tích có thứ nguyên [Lực/ Chiều dài³]
- Tải trọng phân bố mặt có thứ nguyên [Lực/ Chiều dài²]
- Tải trọng phân bố đường có thứ nguyên [Lực/ Chiều dài].

2.1.2. Nội lực

1. Định nghĩa

Nội lực là giá trị tăng thêm của lực liên kết giữa các phần tử trong vật thể để chống lại biến dạng do các tác động vào vật thể gây ra. Nội lực là lực phân bố bề mặt.

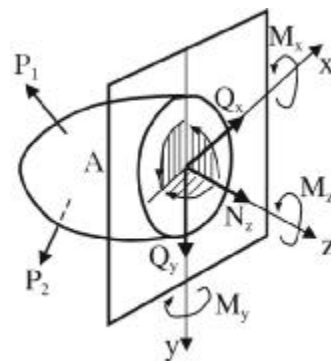
2. Cách xác định nội lực

Để xác định nội lực thường dùng phương pháp mặt cắt, tưởng tượng cắt đôi kết cấu ở vị trí muốn tính nội lực, thay tác động của phần này lên phần kia bằng lực liên kết giữa hai phần (nội lực) tại vị trí mặt cắt. Vì kết cấu ở trạng thái cân bằng nên từng phần của nó ở về một phía của mặt cắt cũng phải cân bằng. Từ điều kiện này viết phương trình cân bằng giữa nội lực và ngoại lực tác dụng lên phần kết cấu ở về một phía của mặt cắt và rút ra biểu thức tính nội lực. Với thanh thường xác định nội lực trên mặt cắt vuông góc với trục thanh. Mặt cắt này được gọi là mặt cắt ngang.

3. Ký hiệu, dấu và đơn vị đo của các thành phần nội lực

Trong trường hợp tổng quát hợp lực của nội lực trên mặt cắt ngang của thanh thường được phân thành 6 thành phần và quy ước chiều dương như trên hình 2.1.2. Đó là:

Lực dọc N_z (N)	Mô men uốn M_x (Nm)
Lực cắt Q_x (N)	Mô men uốn M_y (Nm)
Lực cắt Q_y (N)	Mô men xoắn M_z (Nm)



Hình 2.1.2: Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang

4. Công thức xác định các thành phần nội lực

Được thiết lập trên cơ sở điều kiện cân bằng lực giữa nội lực trên mặt cắt và ngoại lực tác dụng lên thanh ở về một phía của mặt cắt:

$$\begin{aligned} N_z &= \sum z(P_i)^{px} & M_x &= \sum m_x(P_i)^{px} \\ Q_x &= \sum x(P_i)^{px} & M_y &= \sum m_y(P_i)^{px} \\ Q_y &= \sum y(P_i)^{px} & M_z &= \sum m_z(P_i)^{px} \end{aligned}$$

trong đó:

$\sum x, \sum y, \sum z$ lần lượt là tổng hình chiếu lên các trục x, y, z;

$\sum m_x, \sum m_y, \sum m_z$ lần lượt là tổng mô men lấy đối với các trục x, y, z của các ngoại lực tác dụng lên phần xem xét.

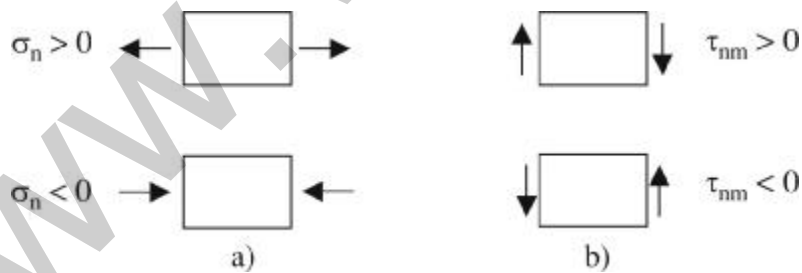
2.1.3. Ứng suất

1. Định nghĩa

Ứng suất là cường độ của nội lực tại một điểm trên mặt cắt ngang. Thứ nguyên của ứng suất là [Lực/Chiều dài²], đơn vị đo là N/m² hoặc Pa (Pascal).

2. Các thành phần ứng suất

- + Ứng suất pháp σ_n , quy ước mang dấu dương nếu là ứng suất kéo (hình 2.1.3 a).
- + Ứng suất tiếp τ_{nm} , quy ước mang dấu dương nếu làm cho phần xét quay thuận chiều kim đồng hồ (hình 2.1.3 b).



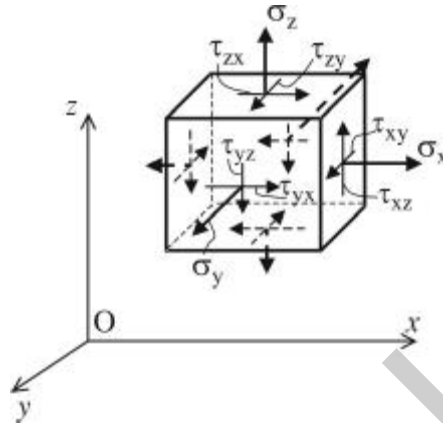
Hình 2.1.3: Quy ước dấu của các thành phần ứng suất

2.1.4. Trạng thái ứng suất (TTUS) tại một điểm trong vật thể cân bằng

1. Định nghĩa

TTUS tại một điểm trong vật thể là tập hợp tất cả các ứng suất trên các mặt của phân tố hình hộp bao quanh điểm đó. Giả sử phân tố có pháp tuyến trên các mặt song song với các trục tọa độ x, y, z (hình 2.1.4) thì các thành phần ứng suất pháp và tiếp trên mỗi mặt của phân tố được ký hiệu:

- + Trên mặt có pháp tuyến x: $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$.
- + Trên mặt có pháp tuyến y: $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$.
- + Trên mặt có pháp tuyến z: $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$.



Hình 2.1.4: Ký hiệu ứng suất trên các mặt

Vì phân tố nằm trong vật thể cân bằng nên nó cũng phải cân bằng dưới tác dụng của ứng suất trên các mặt. Trong trường hợp không có lực phân bố thể tích ứng suất pháp trên các mặt đối diện phải bằng nhau. Còn trong mọi trường hợp ứng suất tiếp trên hai mặt vuông góc với nhau phải có trị bằng nhau và có chiều cùng hướng ra hoặc cùng hướng vào giao tuyến giữa hai mặt, cụ thể là về giá trị:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Đây là nội dung của định luật đối ứng của ứng suất tiếp.

2. Mặt chính, phương chính, ứng suất chính

- + Mặt chính là mặt trên đó chỉ có ứng suất pháp không có ứng suất tiếp.
- + Phương chính là phương pháp tuyến ngoài của mặt chính.
- + Phân tố chính là phân tố có tất cả các mặt đều là mặt chính.
- + Ứng suất chính là ứng suất pháp trên mặt chính. Với phân tố chính ứng suất trên các mặt được ký hiệu là: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, với quy ước: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

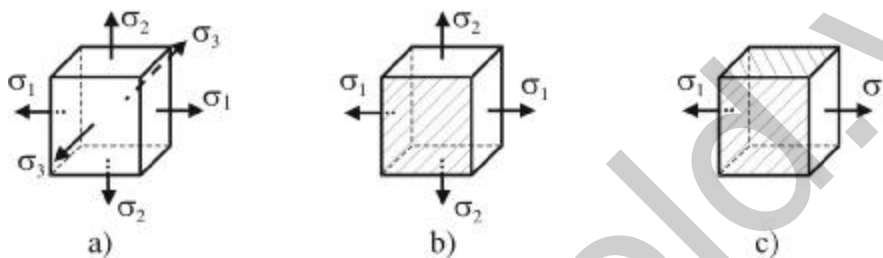
3. Phân loại TTUS

- + *TTUS khối* là TTUS trong đó cả 3 ứng suất chính đều có trị $\neq 0$ (hình 2.1.5 a). Các ứng suất này được ký hiệu là $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (kí hiệu chung là $\sigma_k, k = 1, 2, 3$). Trị của chúng được xác định từ phương trình:

$$\sigma_k^3 - I_1 \sigma_k^2 + I_2 \sigma_k - I_3 = 0 \quad (2.1.1)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\
 I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x \\
 I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.2}$$



Hình 2.1.5: Các loại trạng thái ứng suất

+ TTUS phẳng là TTUS mà chỉ 2 trong 3 ứng suất chính có trị $\neq 0$ (hình 2.1.5 b). Hai ứng suất này thường được ký hiệu là σ_{\max} , σ_{\min} . Trị và phương của chúng được xác định từ các công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_y};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\alpha_{\min} + \alpha_{\max} = k \frac{\pi}{2}; \quad k = 1, 2, 3
 \tag{2.1.3}$$

Theo luật bất biến của trạng thái ứng suất có:

$$\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const}.$$

Các ứng suất tiếp có trị lớn nhất được gọi là ứng suất tiếp cực trị. Trị và phương của chúng được xác định bằng công thức:

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2};$$

$$\beta = \alpha + k45^0;$$

trong đó

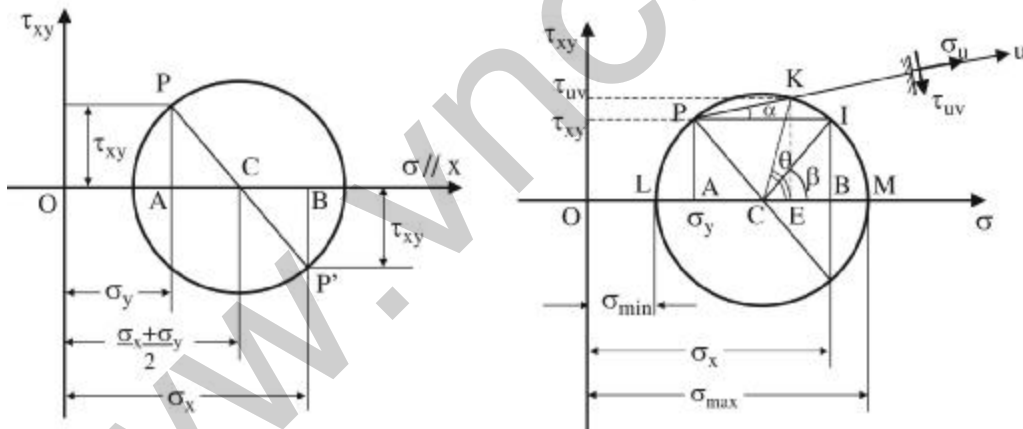
β - phương của ứng suất tiếp lớn nhất (nhỏ nhất);

α - phương của ứng suất chính lớn nhất (nhỏ nhất).

+ TTUS đơn là TTUS mà chỉ một trong ba ứng suất chính $\neq 0$ (hình 2.1.5 c).

Ghi chú:

Các ứng suất cực trị và phương của chúng ở trạng thái ứng suất phẳng còn có thể xác định bằng phương pháp đồ giải thông qua vòng tròn Mo (Mohr) ứng suất. Trong hệ toạ độ vuông góc σ, τ vòng tròn này có tâm C với toạ độ $C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ và bán kính CP, P được gọi là điểm cực có toạ độ $P(\sigma_y, \tau_{xy})$. Sử dụng vòng tròn này ta xác định được các ứng suất chính, các ứng suất tiếp cực trị và các phương của chúng như trên hình 2.1.6.



Hình 2.1.6: Vòng Mo ứng suất

2.1.5. Biến dạng

1. Các thành phần chuyển vị

Trong hệ toạ độ vuông góc, chuyển vị tại mỗi điểm trong vật thể chịu lực có thể phân thành 3 thành phần theo 3 phương x, y, z:

$$u = u(x, y, z),$$

$$v = v(x, y, z),$$

$$w = w(x, y, z).$$

2. Các thành phần biến dạng

Trong hệ tọa độ vuông góc, mỗi phân tố trong vật thể chịu lực có 6 thành phần biến dạng:

- + 3 thành phần biến dạng thẳng tương đối của các cạnh theo 3 phương x, y, z là $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.
- + 3 thành phần biến dạng góc tương đối của góc hợp bởi các cạnh có phương ban đầu song song với các trục x, y, z là $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$.

Ghi chú:

Mọi công thức tính toán với các thành phần biến dạng đều có dạng giống với các công thức tính toán với các thành phần ứng suất. Do vậy, khi tính toán biến dạng chỉ cần thay các thành phần ứng suất $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ bằng các thành phần biến

dạng tương ứng $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{zx}$.

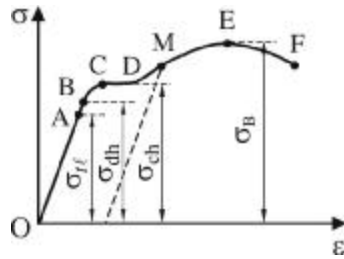
2.2. ĐẶC TR- NG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU VÀ CÁC THUYẾT BỀN

2.2.1. Đặc tr- ng cơ học của vật liệu

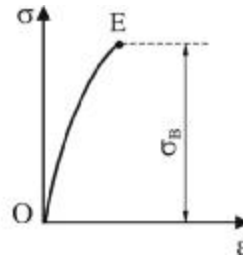
Trong Sức bền vật liệu thường phân vật liệu thành 2 loại: Vật liệu dẻo và vật liệu giòn. Mỗi loại vật liệu có những đặc tính cơ học khác nhau.

Xét biến dạng của một vật liệu dẻo đặc trưng là thép. Hình 2.2.1 là đồ thị biểu diễn quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của mẫu thép khi thí nghiệm kéo. Đồ thị này bao gồm 3 đoạn:

- + Đoạn OA là giai đoạn đàn hồi tỷ lệ. Trong giai đoạn này biến dạng tỷ lệ bậc nhất với ứng suất. Tính đàn hồi thể hiện ở chỗ nếu giảm tải để ứng suất trở về 0, biến dạng cũng bằng 0. Ứng suất ứng với điểm A kết thúc của giai đoạn tỷ lệ được gọi là giới hạn tỷ lệ, ký hiệu là σ_{tl} .
- + Đoạn CD là giai đoạn chảy dẻo. Trong giai đoạn này ứng suất không thay đổi còn biến dạng tăng khá lớn, vật liệu hầu như không còn khả năng chống lại biến dạng. Nếu giảm tải để ứng suất trở về 0 mẫu vẫn còn biến dạng. Phần biến dạng này được gọi là biến dạng dẻo hoặc biến dạng dư. Ứng suất ứng với điểm vật liệu bước vào giai đoạn này được gọi là giới hạn chảy, ký hiệu là σ_{ch} . Cần nói thêm là có một số vật liệu giai đoạn chảy không rõ rệt, chẳng hạn như một số loại thép cứng, đồng v.v... Trong thực tế quy ước giới hạn chảy là ứng suất ứng với biến dạng dẻo có giá trị bằng 0,2%.
- + Đoạn DB là giai đoạn củng cố. Sang giai đoạn này vật liệu lại có khả năng chống lại biến dạng, do vậy biến dạng chỉ tăng khi ứng suất tăng. Ứng suất ứng với điểm B là giới hạn chịu lực tối đa của vật liệu được gọi là giới hạn bền, ký hiệu là σ_B .



Hình 2.2.1: Biểu đồ kéo mẫu thép



Hình 2.2.2: Biểu đồ kéo mẫu gang

Biểu đồ kéo vật liệu giòn, ví dụ gang, có dạng như trên hình 2.2.2. Khác với vật liệu dẻo, vật liệu giòn không có giai đoạn chảy, giai đoạn tỷ lệ không rõ nét, mẫu bị kéo đứt khi biến dạng còn rất bé. Ứng suất ứng với điểm mẫu bị kéo đứt được gọi là giới hạn bền.

Ngoài thí nghiệm kéo còn làm thí nghiệm nén, thí nghiệm cắt mẫu để xác định các ứng suất giới hạn ứng với các trường hợp chịu lực này. Vật liệu dẻo có giới hạn chảy khi kéo và khi nén như nhau. Vật liệu giòn có giới hạn bền khi kéo nhỏ hơn nhiều so với giới hạn bền khi nén. Trong các giới hạn trên σ_{ch} được coi là giới hạn chịu lực tối đa của vật liệu dẻo, σ_B được xem là khả năng chịu lực tối đa của vật liệu giòn.

Ngoài các giới hạn về ứng suất nêu ở trên với các loại vật liệu còn làm thí nghiệm xác định và sử dụng các đặc trưng cơ học sau:

- + Môđun đàn hồi của vật liệu (môđun I-âng) là hệ số tỷ lệ giữa biến dạng và ứng suất, ký hiệu là E. Giá trị này chính là hệ số góc của đoạn OA ứng với giai đoạn tỷ lệ:

$$E = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

- + Hệ số biến dạng ngang (hệ số Poat-xông), ký hiệu là μ :

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_d} \right|$$

trong đó ε_d , ε_n là biến dạng theo phương dọc và biến dạng theo phương ngang vuông góc với nó.

- + Môđun đàn hồi trượt G và môđun biến dạng thể tích K tính bằng công thức:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)};$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}.$$

Để xác định tính dẻo của vật liệu sử dụng 2 đặc trưng là độ giãn dư tương đối δ và độ thắt dư tương đối ψ :

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0};$$

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0}$$

trong đó: l_0 ; F_0 ; l_1 ; F_1 lần lượt là chiều dài, diện tích của mẫu ban đầu và khi bị đứt.

Dưới đây giới thiệu một số đặc trưng cơ học của một số vật liệu thông dụng.

Bảng 2.2.1: Môđun đàn hồi E của vật liệu

Vật liệu	Môđun đàn hồi E (MN/m ²)		Vật liệu	Môđun đàn hồi E (MN/m ²)
	Đông cứng tự nhiên	Chung hấp		
Bê tông mác			Thép carbon	210000
100	17000	15500	Gang	75000 - 150000
150	21000	19000	Đồng	110000
200	24000	21500	Nhôm	69000
250	26500	24000	Đuyra	71000
300	29000	26000	Thuỷ tinh	700000
350	31000	28000	Đá hoa cương	49000
400	33000	30000	Đá vôi	42000
450	34500	31000	Sa thạch	18000
500	36000	32500	Cẩm thạch	56000
600	38000	34000		

Bảng 2.2.2: Hệ số biến dạng ngang của vật liệu

Vật liệu	μ	Vật liệu	μ
Thép	0,25 - 0,30	Đá	0,20 - 0,34
Đồng	0,31 - 0,34	Bê tông	0,08 - 0,18
Gang	0,23 - 0,27	Cao su	0,47
Nhôm	0,32 - 0,36	Cát chặt vừa và chặt	0,15 - 0,30
Thuỷ tinh	0,25	Đất sét	0,20 - 0,40

Bảng 2.2.3: Giới hạn bền σ_B của một số vật liệu dòn (MN/m^2)

Vật liệu	Khi kéo	Khi nén
Gang thường	140 - 180	600 - 1000
Gang hạt mịn	210 - 250	đến 1400
Gỗ thông		
+ Dọc thớ	80	40
+ Ngang thớ	-	5
Đá hoa cương	3	120 - 260
Sa thạch	2	40 - 150
Đá vôi	-	50 - 150
Gạch	-	7,4 - 30
Bê tông	-	5 - 35
Khối đá xây	0,2 - 0,5	2,5 - 9

2.2.2. Các thuyết bền

1. Thuyết bền ứng suất pháp cực đại

- + Luận điểm: Ứng suất pháp cực đại là nguyên nhân phá hoại vật liệu.
- + Điều kiện bền:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\leq [\sigma]_k \\ \sigma_3 &\leq [\sigma]_n\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

trong đó $[\sigma]_k$, $[\sigma]_n$ là ứng suất cho phép của vật liệu khi chịu kéo và khi chịu nén được xác định bằng công thức:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \quad (2.2.2)$$

với σ_0 là ứng suất giới hạn và n là hệ số an toàn.

Vật liệu dẻo lấy $\sigma_0 = \sigma_{ch}$.

Vật liệu dòn lấy $\sigma_0 = \sigma_B$.

Hệ số an toàn lấy trị số > 1 .

2. Thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất

- + Luận điểm: Ứng suất tiếp lớn nhất là nguyên nhân phá hoại vật liệu.
- + Điều kiện bền:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (2.2.3)$$

hoặc biểu diễn qua ứng suất chính:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (2.2.4)$$

3. Thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng

+ Luận điểm: Năng lượng tích lũy khi biến dạng về mặt hình dáng là nguyên nhân phá hoại vật liệu.

+ Điều kiện bền:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]} \leq [\sigma] \quad (2.2.5)$$

4. Thuyết bền Mo

+ Luận điểm: σ_1 và σ_3 là nguyên nhân phá hoại vật liệu.

+ Điều kiện bền:

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \sigma_3 \leq [\sigma]_k \quad (2.2.6)$$

Ghi chú: Với các kết cấu làm bằng các vật liệu cụ thể như gạch đá, bê tông, BTCT, thép, v.v... thay cho hệ số an toàn người ta đã đưa vào một số hệ số khác như hệ số vượt tải, hệ số điều kiện làm việc v.v... (xem STKTTL, Phần 1 - Tập 2).

2.3. ĐẶC TR- NG HÌNH HỌC MẶT CẮT NGANG CỦA THANH

2.3.1. Định nghĩa

1. Diện tích hình phẳng F

$$F = \int_F dF$$

2. Mô men tĩnh của hình phẳng

+ Đối với trục x:

$$S_x = \int_F y dF$$

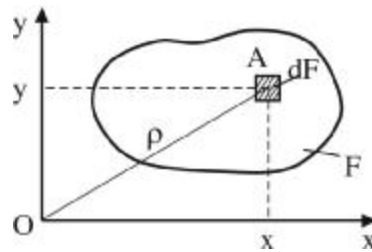
+ Đối với trục y:

$$S_y = \int_F x dF$$

3. Tọa độ trọng tâm C của hình phẳng

$$x_c = \frac{S_y}{F}$$

$$y_c = \frac{S_x}{F}$$



Hình 2.3.1

4. Mô men quán tính của hình phẳng

+ Đối với trục x:

$$J_x = \int_F y^2 dF$$

+ Đối với trục y:

$$J_y = \int_F x^2 dF$$

5. Mô men quán tính ly tâm của hình phẳng đối với hệ trục xy

$$J_{xy} = \int_F xy dF$$

6. Mô men quán tính cực của hình phẳng đối với một điểm

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF ;$$

7. Mô men quán tính chính trung tâm

- + *Trục trung tâm*: Trục x được gọi là trục trung tâm nếu mô men tĩnh của hình phẳng đối với nó bằng 0 ($S_x = 0$). Từ công thức tính trọng tâm của hình phẳng có thể thấy trục trung tâm là trục bất kỳ đi qua trọng tâm của hình.
- + *Hệ trục chính*: Hệ trục xy được gọi là hệ trục chính nếu mô men quán tính ly tâm của hình phẳng đối với hệ trục đó bằng 0 ($J_{xy} = 0$). Với hình phẳng có ít nhất một trục là trục đối xứng, hệ trục chính là hệ trục có một trục là trục đối xứng đó.
- + *Hệ trục chính trung tâm*: Hệ trục xy được gọi là hệ trục chính trung tâm nếu có gốc đặt tại trọng tâm của hình phẳng ($S_x = S_y = 0$) và mô men quán tính ly tâm đối với hệ trục đó bằng 0 ($J_{xy} = 0$). Với hình phẳng có hai trục là trục đối xứng, hai trục đối xứng đó chính là hai thành phần của của hệ trục chính trung tâm.
- + Mô men quán tính đối với hệ trục chính trung tâm được gọi là mô men quán tính chính trung tâm. Có hai giá trị mô men quán tính chính trung tâm, giá trị cực đại, ký hiệu là J_{\max} , còn giá trị kia là cực tiểu, ký hiệu là J_{\min} .

8. Bán kính quán tính của hình phẳng

+ Đối với trục x:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}};$$

+ Đối với trục y:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}.$$

9. Môđun chống uốn của hình phẳng

+ Đối với trục x:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$$

+ Đối với trục y:

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}$$

trong đó: x_{\max} , y_{\max} là khoảng cách từ điểm xa nhất trên mép biên đến trục y và trục x là hai thành phần của hệ trục chính trung tâm.

10. Môđun chống xoắn của mặt cắt tròn hoặc vành khăn

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}}$$

trong đó: ρ_{\max} là bán kính ứng với chu vi ngoài của mặt cắt.

Chú ý:

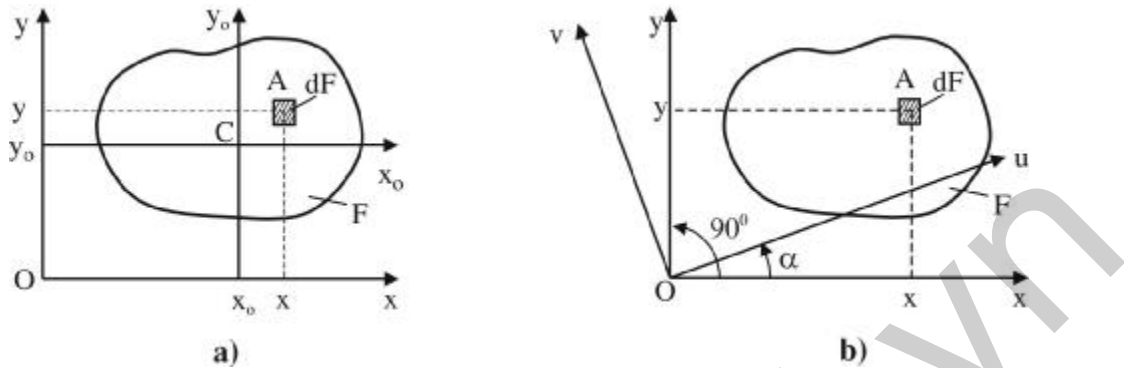
- + Thứ nguyên của mô men tĩnh là $[\text{dài}]^3$, còn của mô men quán tính là $[\text{dài}]^4$.
- + Mô men tĩnh và mô men quán tính ly tâm có thể dương, âm hoặc bằng 0, còn mô men quán tính và mô men quán tính cực luôn có trị số dương.
- + Khi tính mô men tĩnh và mô men quán tính có thể sử dụng nguyên lý chồng chất, có nghĩa là với một hình phức tạp gồm n hình đơn giản có thể tính riêng cho từng hình rồi cộng kết quả lại. Ví dụ, với hình phẳng được chia thành n hình thì mô men tĩnh với trục x của toàn hình:

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_{x_i}$$

+ Với một hình phẳng bất kỳ luôn luôn có:

$$J_\rho = J_x + J_y.$$

2.3.2. Một số công thức th- ờng dùng



Hình 2.3.2

1. Công thức tính mô men quán tính của hình phẳng đối với hệ trục xy bất kỳ từ mô men quán tính của hình phẳng với hệ trục $x_c y_c$ đi qua trọng tâm song song với nó (hình 2.3.2 a):

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_c} + a^2 F \\ J_y &= J_{y_c} + b^2 F \\ J_{xy} &= J_{x_c y_c} + abF \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

2. Công thức tính mô men quán tính của hình phẳng khi quay trục một góc α (hình 2.3.2 b):

$$\begin{aligned} J_U &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{UV} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

trong đó chiều dương của góc α quy ước như trên hình 2.10 b.

3. Công thức xác định các mô men quán tính chính trung tâm và phương của trục chính trung tâm:

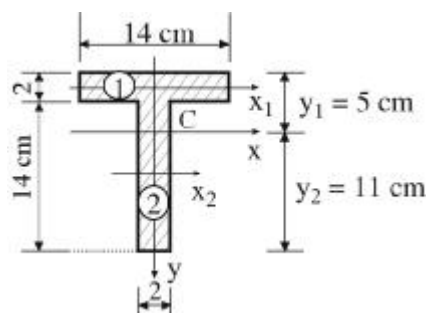
$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \quad (2.3.2)$$

trong đó dấu "+" ứng với J_{\max} , dấu "-" ứng với J_{\min} .

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = -\frac{J_{xy}}{J_{\max} - J_y} = -\frac{J_{xy}}{J_x - J_{\min}} \quad (2.3.3)$$

Ví dụ:

Xác định mô men quán tính chính trung tâm của hình phẳng cho trên hình 2.3.4.



Hình 2.3.4

1. Xác định trọng tâm của mặt cắt ngang:

Chia mặt cắt đã cho thành 2 hình chữ nhật 1 và 2 (hình 2.3.4). Chọn hệ trục ban đầu $x_0y_0 \equiv x_1y_1$ và xác định trọng tâm C (x_c, y_c) của mặt cắt đối với hệ trục ban đầu x_0y_0 . Do tính chất đối xứng của mặt cắt nên $x_c = 0$ và y_c bằng:

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{F} = \frac{y_{c_1} F_1 + y_{c_2} F_2}{F_1 + F_2} = \frac{0 + 8 \times 2 \times 14}{14 \times 2 + 2 \times 14} = 4 \text{ cm}$$

Nếu chọn gốc tọa độ ở trọng tâm C thì hệ trục xCy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

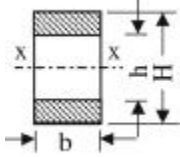
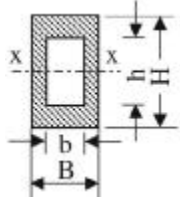
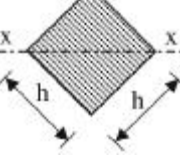
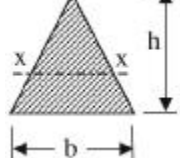
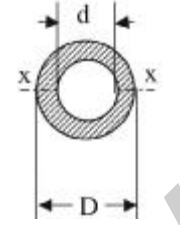
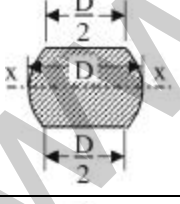
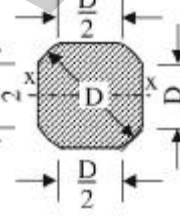
2. Xác định mô men quán tính chính trung tâm của mặt cắt:

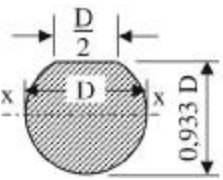
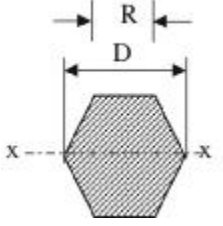
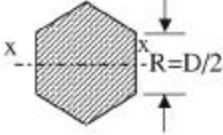
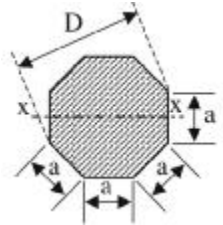
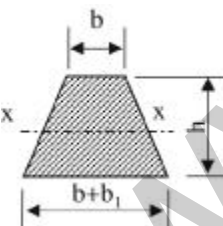
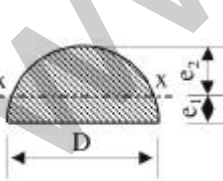
$$J_x = \left(\frac{14 \times 2^3}{12} + 4^2 \times 14 \times 2 \right) + \left(\frac{2 \times 14^3}{12} + 4^2 \times 2 \times 14 \right) = 1362,67 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \frac{2 \times 14^3}{12} + \frac{14 \times 2^3}{12} = 466,67 \text{ cm}^4.$$

Bảng 2.3.1. Các đặc trưng hình học của một số hình phẳng

Mặt cắt	Mô men quán tính J_x	Mô đun chống uốn W_x	Diện tích mặt cắt F	Bán kính quán tính i_x
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	bh	$0,289 h$

Mặt cắt	Mô men quán tính J_x	Mô đùn chống uốn W_x	Diện tích mặt cắt F	Bán kính quán tính i_x
	$\frac{b(H^3 - h^3)}{12}$	$\frac{b(H^3 - h^3)}{6H}$	$b(H - h)$	$\sqrt{\frac{H^3 - h^3}{12(H - h)}}$
	$\frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$\frac{BH^3 - bh^3}{6H}$	$BH - bh$	$\sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$
	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^3}{6\sqrt{2}} = 0,1179h^3$	h^2	0,289 h
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{h}{\sqrt{18}} = 0,236h$
	$\frac{\rho(D^4 - d^4)}{64}$	$\frac{\rho(D^4 - d^4)}{32D}$	$\frac{\rho(D^2 - d^2)}{4}$	$\sqrt{\frac{D^2 + d^2}{16}}$
	$0,039 D^4$	$0,088 D^3$	$0,740 D^2$	0,230 D
	$0,038 D^4$	$0,087 D^3$	$0,693 D^2$	0,235 D

Mặt cắt	Mô men quán tính J_x	Mô đùn chống uốn W_x	Diện tích mặt cắt F	Bán kính quán tính i_x
	$0,044 D^4$	$0,092 D^3$	$0,763 D^2$	$0,240 D$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413R^4$	$\frac{5}{8} R^3$	$0,6945 D^2$	$0,456 R$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413R^4$	$0,5413 R^3$	$0,6945 D^2$	$0,456 R$
	$\frac{1+2\sqrt{2}}{6} R^4 = 0,6381R^4$	$0,6906 R^3$	$0,707 D^2$	$0,475 R$
	$\frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)} h^3$ $\left(e = \frac{1}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} h \right)$	$\frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(3b + 2b_1)} h^2$	$(b + 0,5b_1) h$	$\frac{h}{6(2b + b_1)} \times \sqrt{2(6bb_1 + 6b^2 + b_1^2)}$
	$\frac{D^4}{16} \left(\frac{p}{8} - \frac{8}{9p} \right) = 0,00687D^4$ $(e_1 = 0,21221D)$	$W_1 = 0,03234 i D^3$ $W_2 = 0,02385 i D^3$	$\frac{\pi D^2}{8}$	$0,135 D$

2.4. TÍNH THANH, DẦM VÀ DÂY MỀM

2.4.1. Tính thanh chịu kéo (nén) đúng tâm

1. Nội lực trên mặt cắt ngang

Lực dọc N_z

2. Quy ước dấu của lực dọc

$N_z > 0$ nếu là lực kéo,

$N_z < 0$ nếu là lực nén (hình 2.4.1).



Hình 2.4.1: Dấu của N_z

3. Ứng suất trên mặt cắt ngang

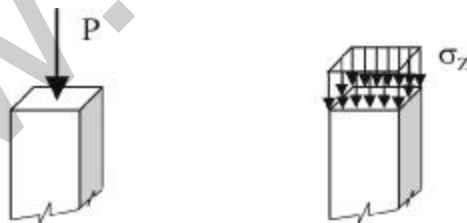
$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} = \varepsilon_z E \quad (2.4.1)$$

trong đó:

F - Diện tích mặt cắt ngang;

ε_z - Biến dạng dài tương đối theo phương dọc trục.

Ứng suất σ_z luôn có cùng dấu với lực dọc N_z . Biểu đồ phân bố ứng suất σ_z trên mặt cắt ngang như trên hình 2.4.2.



Hình 2.4.2: Biểu đồ phân bố ứng suất σ_z trên mặt cắt ngang

4. Biến dạng

Biến dạng dọc của thanh gồm n đoạn có nội lực và độ cứng trong mỗi đoạn khác nhau:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N_{zi}}{(EF)_i} dz \quad (2.4.2)$$

trong đó: EF là độ cứng của thanh chịu lực dọc.

Nếu trên đoạn thanh nào đó có $N_z = \text{const}$, $EF = \text{const}$ thì có thể tính biến dạng dọc theo công thức đơn giản sau:

$$\Delta l = \frac{N_z \ell}{EF} \tag{2.4.3}$$

với ℓ là chiều dài đoạn thanh.

Dấu của biến dạng lấy theo dấu của lực dọc. Nếu $\Delta l > 0$ thanh bị dãn dài, $\Delta l < 0$ thanh bị co ngắn.

Ví dụ 1:

Cho thanh chịu lực như trên hình 2.4.3. Vẽ biểu đồ nội lực, tính ứng suất trên mặt cắt ngang và tính biến dạng dài của thanh. Biết thanh có diện tích mặt cắt ngang $F = 1 \text{ cm}^2$, môđun đàn hồi của vật liệu làm thanh $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$, $P = 100 \text{ kN}$, $q = 4 P/\ell$, $\ell = 2 \text{ m}$.

+ Vẽ biểu đồ nội lực: Thanh được chia làm 2 đoạn: AB và BC.

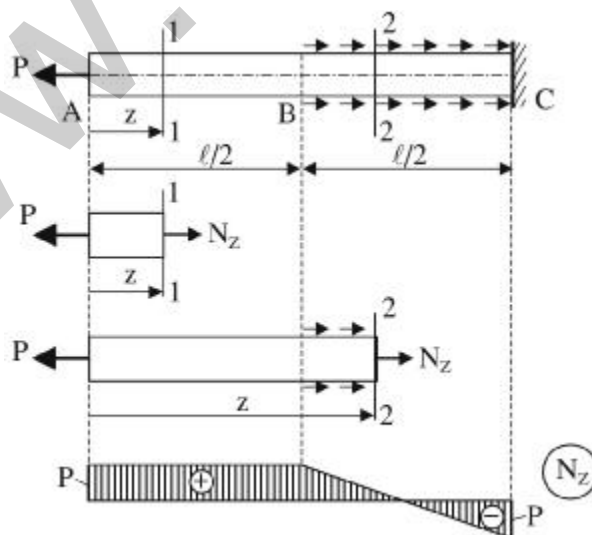
- Xét đoạn AB: Dùng mặt cắt 1-1, gốc tọa độ tại A:

$$N_z^1 = +P \quad (0 \leq z \leq \ell/2)$$

- Xét đoạn BC: Dùng mặt cắt 2-2, gốc tọa độ tại B:

$$N_z^2 = P - qz \quad (0 \leq z \leq \ell/2)$$

Biểu đồ nội lực như trên hình 2.4.3.



Hình 2.4.3

+ Tính ứng suất :

- Ứng suất kéo lớn nhất:

$$\sigma_K = \frac{N_z}{F} = \frac{+P}{F} = \frac{100}{1} = 100 \text{ kN/cm}^2$$

- Ứng suất nén lớn nhất:

$$\sigma_N = \frac{N_z}{F} = \frac{-P}{F} = \frac{-100}{1} = -100 \text{ kN/cm}^2$$

+ Tính biến dạng của thanh:

$$\Delta l = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC}$$

$$\Delta l_{AB} = \frac{+N_z^1 \ell / 2}{EF} = \frac{P\ell}{2EF}$$

$$\Delta l_{BC} = \int_0^{\ell/2} \frac{N_z^2}{EF} dz = \int_0^{\ell/2} \frac{P - qz}{EF} dz = 0$$

$$\Delta l = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = \frac{P\ell}{2EF} = \frac{100 \times 200}{2 \times 2 \times 10^6 \times 1} = +5 \times 10^{-3} \text{ cm} > 0.$$

Vậy thanh bị dãn.

5. Điều kiện bền

$$\frac{N_z}{F} \leq [\sigma]$$

trong đó: $[\sigma]$ là ứng suất cho phép của vật liệu.

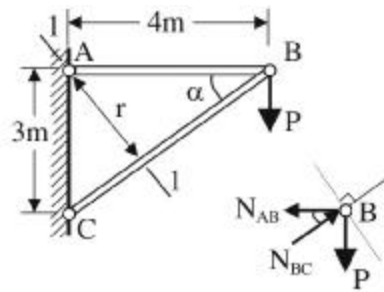
Từ điều kiện bền có thể giải các bài toán: Kiểm tra bền, chọn tải trọng cho phép đặt vào kết cấu hoặc chọn lựa kích thước của mặt cắt ngang của thanh để bảo đảm an toàn cho kết cấu.

Ví dụ 2:

Cho kết cấu chịu lực như hình 2.4.4. Kiểm tra bền cho thanh BC và chọn mặt cắt cho thanh AB. Biết $P = 0,03 \text{ MN}$, $F_{BC} = 0,02 \text{ m}^2$, các thanh đều làm bằng cùng một loại vật liệu có $[\sigma] = 140 \text{ MN/m}^2$.

Giải:

Dùng mặt cắt 1-1 cắt kết cấu làm 2 phần, xét phần ngoài có chứa tải trọng P.



Hình 2.4.4

+ Xác định nội lực:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P \cdot 4 - N_{BC} \cdot r = 0 \quad (*)$$

$$r = AB \cdot \sin \alpha; \sin \alpha = 3/5 \Rightarrow r = 4 \cdot 3/5;$$

thay vào (*) $\Rightarrow N_{BC} = \frac{5}{3} P = 0,05 \text{ MN}.$

Tương tự:

$$\sum m_C = 0 \Rightarrow N_{AB} = \frac{4}{3} P = 0,04 \text{ MN}.$$

+ Kiểm tra bền cho thanh BC:

$$\sigma_z^{BC} = \frac{N_{BC}}{F_{BC}} = \frac{0,05}{0,02} = 2,5 \text{ MN/m}^2 < [\sigma] = 140 \text{ MN/m}^2.$$

Vậy thanh an toàn về độ bền.

+ Chọn mặt cắt cho thanh AB:

$$F_{AB} \geq \frac{N_{AB}}{[\sigma]} = \frac{0,04}{140} = 2,857 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 2,857 \text{ cm}^2.$$

Chọn $F_{AB} = 2,9 \text{ cm}^2$

2.4.2. Tính dầm chịu uốn phẳng

1. Dầm

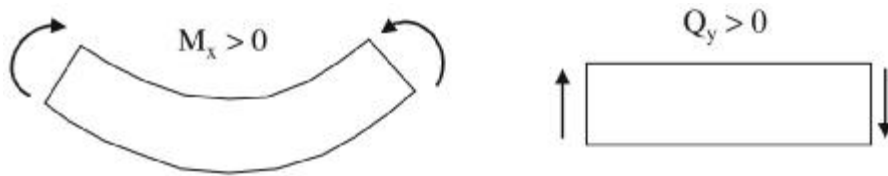
Thuật ngữ chuyên môn chỉ thanh chủ yếu chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng.

2. Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang

Mô men uốn M_x và lực cắt Q_y .

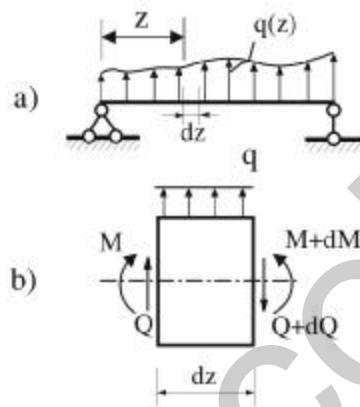
3. Quy ước dấu nội lực

- + $M_x > 0$ nếu làm căng thớ dưới và $M_x < 0$ nếu làm căng thớ trên của dầm.
- + $Q_y > 0$ nếu làm cho phần xét quay thuận chiều kim đồng hồ, $Q_y < 0$ nếu làm phần xét quay ngược chiều kim đồng hồ (hình 2.4.5).



Hình 2.4.5: Quy ước dấu của M và Q trên mặt cắt ngang

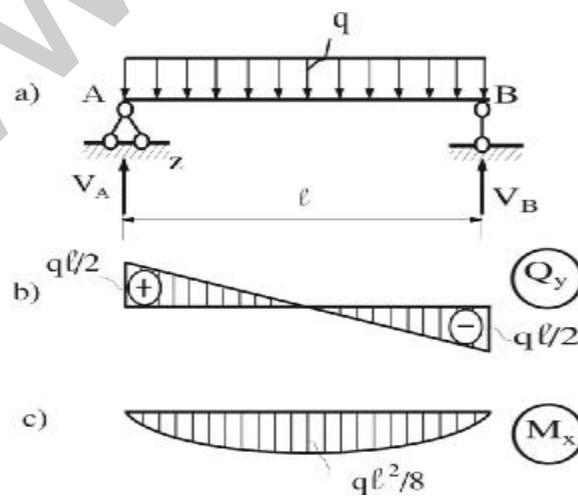
4. Liên hệ vi phân giữa các nội lực và tải trọng phân bố



Hình 2.4.6

Từ điều kiện cân bằng của đoạn dầm có chiều dài dz (hình 2.4.6) rút ra liên hệ vi phân giữa nội lực Q_y , M_x và cường độ của tải trọng phân bố q tại mặt cắt z như sau:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q(z); \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y; \quad \frac{d^2M_x}{dz^2} = -q(z) \quad (2.4.4)$$



Hình 2.4.7

Từ các mối liên hệ này rút ra một số nhận xét sau (hình 2.4.7):

- + Nếu q là hàm bậc n của z thì Q_y là hàm bậc $n + 1$ và M_x là hàm bậc $n + 2$. Trường hợp thường gặp $q = \text{const}$ thì Q_y là hàm bậc nhất, M_x là hàm bậc 2.
- + Tại mỗi mặt cắt của dầm, cường độ tải trọng phân bố q bằng hệ số góc của tiếp tuyến với biểu đồ Q ($q = \text{tg}\alpha_Q$) và lực cắt bằng hệ số góc của tiếp tuyến với biểu đồ mô men ($Q = \text{tg}\alpha_M$).
- + Tại mặt cắt $q = 0$ thì Q đạt cực trị, tại mặt cắt $Q = 0$ thì M đạt cực trị.

5. Ứng suất trên mặt cắt ngang

+ Ứng suất pháp:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad (2.4.5)$$

hoặc tính theo công thức kỹ thuật:

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \quad (2.4.6)$$

+ Ứng suất tiếp:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{J_x} \frac{|S_x^c|}{b_c} \quad (2.4.7)$$

trong đó:

M_x, Q_y - mô men uốn và lực cắt tại mặt cắt cần tính ứng suất;

J_x - mô men quán tính của mặt cắt đối với trục x ;

y - tung độ của điểm tính ứng suất;

S_x^c - mô men tính đối với trục x của phần mặt cắt giới hạn từ điểm tính ứng suất đến biên dưới của mặt cắt;

b_c - chiều rộng của đường cắt đi qua điểm tính ứng suất.

Chú ý là trục x sử dụng trong tính toán là một thành phần của hệ trục quán tính chính trung tâm. Vì trên trục x ứng suất pháp bằng 0, nên trục x còn được gọi là *trục trung hoà*.

+ Dấu của ứng suất

- Dấu của ứng suất pháp: Nếu tính theo công thức (2.4.5) thì dấu của σ_z phụ thuộc dấu của M_x và y . Còn nếu tính theo công thức kỹ thuật (2.4.6) thì lấy dấu của ứng suất theo phân vùng ứng suất. Ứng suất nằm ở vùng mặt cắt chịu kéo

lấy dấu dương, nằm ở vùng mặt cắt chịu nén lấy dấu âm. Vùng chịu kéo hay chịu nén của mặt cắt được xác định theo chiều căng của mô men tại mặt cắt đó. Ví dụ ở mặt cắt vẽ ở hình 2.4.8 ứng suất ở điểm A mang dấu dương, ở điểm B mang dấu âm. Do đó

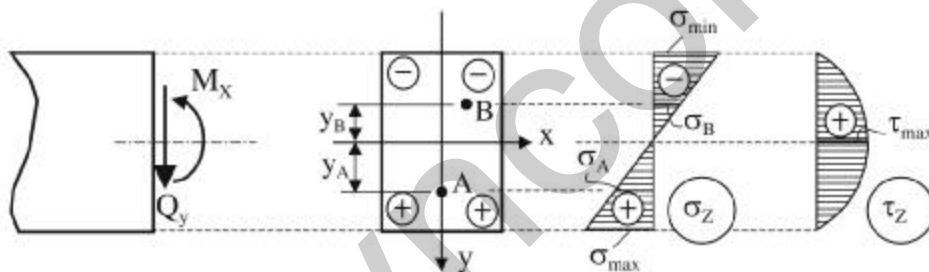
$$\sigma_z^A = + \frac{|M_x|}{J_x} |y_A|,$$

còn
$$\sigma_z^B = - \frac{|M_x|}{J_x} |y_B|.$$

- Dấu của ứng suất tiếp: Luôn lấy trùng với dấu của lực cắt Q_y .

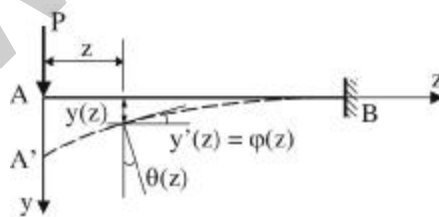
+ Biểu đồ ứng suất

Trên mặt cắt ngang biểu đồ ứng suất pháp có dạng bậc nhất, biểu đồ ứng suất tiếp có dạng parabol (hình 2.4.8).



Hình 2.4.8: Biểu đồ ứng suất pháp và tiếp trên mặt cắt ngang

6. Chuyển vị của dầm (hình 2.4.9)



Hình 2.4.9: Chuyển vị của dầm

+ Đường đàn hồi: Thuật ngữ chuyên môn chỉ trục cong của dầm khi bị uốn.

+ Các thành phần chuyển vị:

- Độ võng của trục dầm, thường ký hiệu là y .
- Góc xoay của mặt cắt ngang, thường ký hiệu là θ .

+ Phương trình xác định độ võng và góc xoay:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (2.4.8)$$

$$\theta = \frac{dy}{dz}$$

trong đó EJ_x là độ cứng chống uốn của dầm. Dưới đây để đơn giản sẽ ký hiệu là EJ .

+ Một số phương pháp xác định phương trình đường đàn hồi của dầm:

- Phương pháp tích phân không xác định:

Tích phân trực tiếp phương trình vi phân (2.4.8) được:

$$\theta = \int -\frac{M_x}{EJ} dz + C;$$

$$y = \int \left[\int -\frac{M_x}{EJ} dz \right] dz + Cz + D$$

Sau đó dựa vào điều kiện chuyển vị tại các liên kết xác định các hằng số tích phân C và D .

- Phương pháp thông số ban đầu:

Thiết lập công thức truy hồi để thiết lập phương trình độ võng của đoạn thứ $i + 1$ nếu biết phương trình độ võng của đoạn thứ i :

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_a + \Delta \theta_a (z - a) - \frac{1}{EJ} [K_{i+1} M_{i+1}(a) - K_i M_i(a)] \times$$

$$\times \frac{(z - a)^2}{2!} - \frac{1}{EJ} [K_{i+1} Q_{i+1}(a) - K_i Q_i(a)] \frac{(z - a)^3}{3!} -$$

$$- \frac{1}{EJ} [K_{i+1} q_{i+1}(a) - K_i q_i(a)] \frac{(z - a)^4}{4!} -$$

$$- \frac{1}{EJ} [K_{i+1} q'_{i+1}(a) - K_i q'_i(a)] \frac{(z - a)^5}{5!} \quad (2.4.9)$$

trong đó:

EJ - độ cứng qui ước (chẳng hạn $EJ = E_1 J_1$);

$$\frac{EJ}{E_i J_i} = K_i;$$

$$\frac{EJ}{E_{i+1} J_{i+1}} = K_{i+1}.$$

Nếu các đoạn đều có độ cứng như nhau ($EJ = \text{const}$) thì

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_a + \Delta \theta_a (z-a) - \frac{\Delta M_a}{EJ} \frac{(z-a)^2}{2!} - \frac{\Delta Q_a}{EJ} \frac{(z-a)^3}{3!} - \frac{\Delta q_a}{EJ} \frac{(z-a)^4}{4!} - \frac{\Delta q_a}{EJ} \frac{(z-a)^5}{5!} + \dots \quad (2.4.10)$$

- Phương pháp đồ toán (phương pháp tải trọng giả):

Sử dụng đại lượng

$$q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ}$$

gọi là “tải trọng giả” đặt lên một “dầm giả” được chọn trên cơ sở dầm cần tìm chuyển vị (dầm thật) thì lực cắt và mô men trên dầm giả gây ra bởi “tải trọng giả” chính là góc xoay và độ võng của dầm thật. Trong bảng 2.4.1 trình bày một số mẫu “dầm giả” được lựa chọn từ dầm thật để tính chuyển vị cho dầm thật.

Ghi chú:

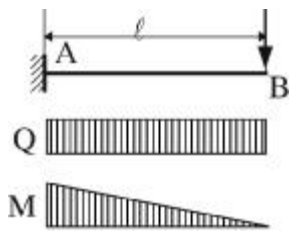
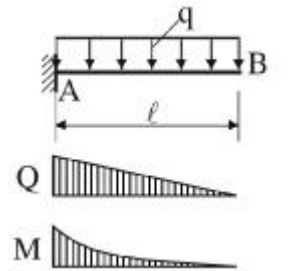
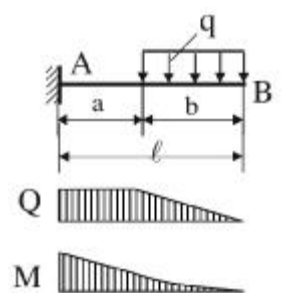
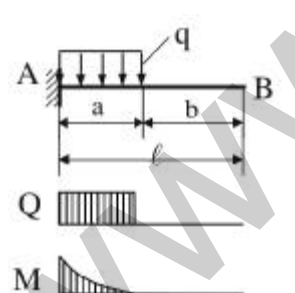
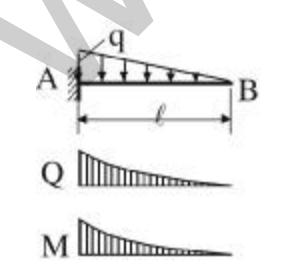
Cũng có thể tính chuyển vị của dầm bằng các phương pháp của cơ học kết cấu giới thiệu ở mục 2.5.

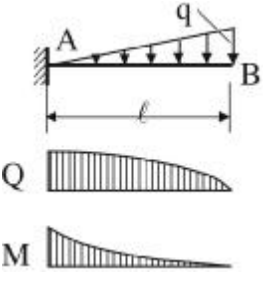
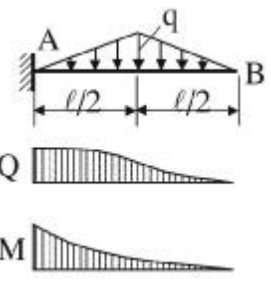
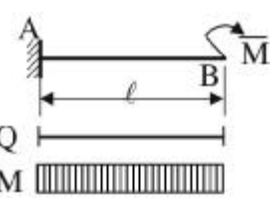
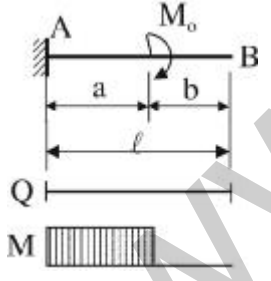
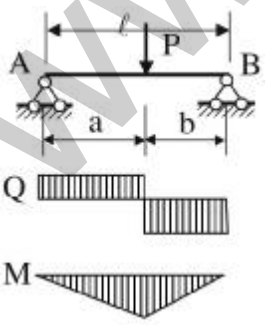
Trong bảng 2.4.2 trình bày kết quả tính toán phản lực, nội lực và chuyển vị của một số dạng dầm thường gặp.

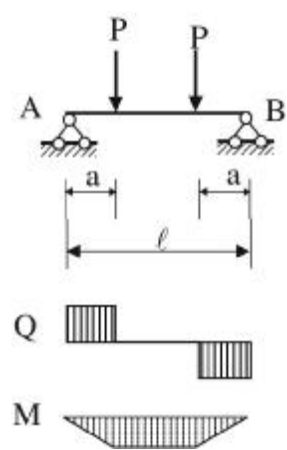
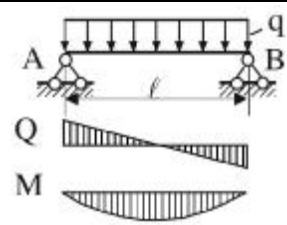
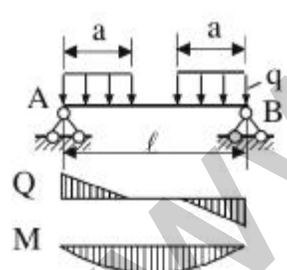
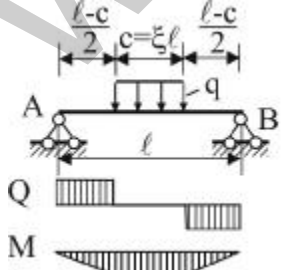
Bảng 2.4.1: Một số sơ đồ dầm thật và "dầm giả"

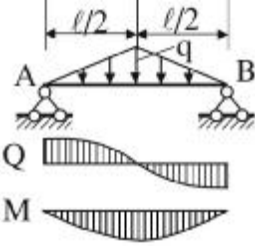
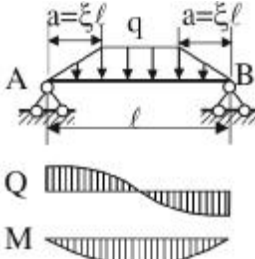
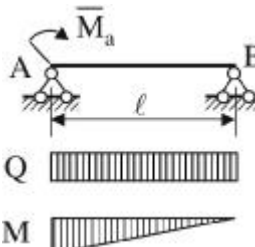
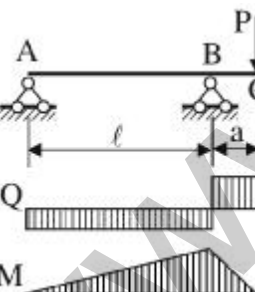
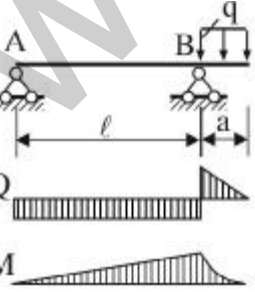
Dầm thật		Dầm giả	
	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} \neq 0$
	$y = 0$ $\theta = 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} = 0$	$M_{gt} \neq 0$ $Q_{gr} \neq 0$
	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} \neq 0$
	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_{gt} \neq 0$ $Q_{gr} \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} = 0$
	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_{gt} \neq 0$ $Q_{gr} \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} \neq 0$
	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} \neq 0$
	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gr} \neq 0$

Bảng 2.4.2: Phản lực, nội lực và chuyển vị của một số dầm thường gặp

Sơ đồ tải trọng Biểu đồ Q và M	Phản lực	Độ võng lớn nhất	Góc xoay lớn nhất
	$A = P$ $M_A = -P\ell$	$y_{\max} = y_B = \frac{P\ell^3}{3EJ}$	$\theta_{\max} = \frac{P\ell^2}{2EJ}$
	$A = q\ell$ $M_A = -\frac{q\ell^2}{2}$	$y_{\max} = \frac{q\ell^4}{8EJ}$	$\theta_{\max} = \frac{q\ell^3}{6EJ}$
	$A = qb$ $M_A = -\frac{qb}{2}(\ell + a)$	$y_{\max} = y_B = \frac{q\ell^4}{24EJ} \times \left(3 - \frac{4a^3}{\ell^3} + \frac{a^4}{\ell^4} \right)$	$\theta_{\max} = \frac{q\ell^3}{6EJ} \times \left(1 - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
	$A = qa$ $M_A = -\frac{qa^2}{2}$	$y_{\max} = \frac{qa^3}{24EJ} \times (4\ell - a) = y_B$	$\theta_{\max} = \frac{qa^3}{6EJ}$
	$A = \frac{q\ell}{2}$ $M_A = -\frac{q\ell^2}{6}$	$y_{\max} = y_B = \frac{q\ell^4}{30EJ}$	$\theta_{\max} = \frac{q\ell^3}{24EJ}$

Sơ đồ tải trọng Biểu đồ Q và M	Phản lực	Độ võng lớn nhất	Góc xoay lớn nhất
	$A = \frac{ql}{2}$ $M_A = -\frac{ql^2}{3}$	$y_{\max} = y_B = \frac{11ql^4}{120EJ}$	$\theta_{\max} = \frac{ql^3}{8EJ}$
	$A = \frac{ql}{2}$ $M_A = -\frac{ql^2}{4}$	$y_{\max} = y_B = \frac{11ql^4}{192EJ}$	$\theta_{\max} = \frac{7ql^3}{96EJ}$
	$A = 0$ $M_A = -\bar{M}$	$y_{\max} = y_B = \frac{\bar{M}l^2}{2EJ}$	$\theta_{\max} = \frac{\bar{M}l}{EJ}$
	$A = 0$ $M_A = -\bar{M}$	$y_{\max} = y_B = \frac{\bar{M}a}{2EJ}(2l - a)$	$\theta_{\max} = \frac{\bar{M}a}{EJ}$
	$A = \frac{Pb}{l}; B = \frac{Pa}{l}$ $M_{\max} = \frac{Pab}{l}$ <p>Khi $a = b = l/2$</p> $M_{\max} = \frac{Pl}{4}$	<p>Tại $z = a$ thì:</p> $y = \frac{Pa^2b^2}{3EJl}$ <p>Khi $a = b = l/2$ thì:</p> $y_{\max} = \frac{Pl^3}{48EJ}$	$\theta_A = \frac{Pab(l+b)}{6EJl}$ $\theta_B = \frac{Pab(l+a)}{6EJl}$ <p>Khi $a = b = l/2$ thì:</p> $\theta_A = -\theta_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$

Sơ đồ tải trọng Biểu đồ Q và M	Phản lực	Độ võng lớn nhất	Góc xoay lớn nhất
	$A = B = P$ $M_{\max} = Pa$	$y_{\max} = y _{z=l/2} =$ $= \frac{Pa}{24EJ} (3l^2 - 4a^2)$	$\theta_A = -\theta_B =$ $= \frac{Pa}{2EJ} (l - a)$
	Khi $a = l/3$		
	$M_{\max} = \frac{P\ell}{3}$	$y_{\max} = y _{z=l/2} =$ $= \frac{P\ell^3}{28,17EJ}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{P\ell^2}{6EJ}$
	Khi $a = l/4$		
	$M_{\max} = \frac{P\ell}{4}$	$y_{\max} = y _{z=l/2} =$ $= \frac{11P\ell^3}{384EJ}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{3P\ell^2}{32EJ}$
	$A = B = \frac{q\ell}{2}$ $M_{\max} = M _{z=l/2} = \frac{q\ell^2}{8}$	$y_{\max} = y _{z=l/2} =$ $= \frac{5q\ell^4}{384EJ}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{P\ell^3}{24EJ}$
	$A = B = qa$ $M_{\max} = \frac{qa^2}{2}$	$y_{\max} = y _{z=l/2} =$ $= \frac{qa^2 (3l^2 - 2a^2)}{48EJ}$	$\theta_A = -\theta_B =$ $= \frac{qa^2 (3l - 2a)}{12EJ}$
	Khi $a = l/3$		
	$M_{\max} = \frac{q\ell^2}{18}$	$y_{\max} = \frac{25q\ell^4}{3888EJ}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{7q\ell^3}{324EJ}$
	Khi $a = l/4$		
	$M_{\max} = \frac{q\ell^2}{32}$	$y_{\max} = \frac{23q\ell^4}{6144EJ}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{5q\ell^3}{384EJ}$
	$A = B = \frac{qc}{2}$ $M_{\max} = M _{z=l/2} =$ $= \frac{qc}{4} \left(1 - \frac{c}{2}\right)$	$y_{\max} = y _{z=l/2} = \frac{q\ell^4}{384EJ}$ $\times (8\xi - 4\xi^3 + \xi^4)$	$\theta_A = -\theta_B =$ $= \frac{q\ell^3}{48EJ} (3\xi - \xi^3)$

Sơ đồ tải trọng Biểu đồ Q và M	Phản lực	Độ võng lớn nhất	Góc xoay lớn nhất
	$A = B = \frac{q\ell}{4}$ $M_{\max} = M_{ z=\ell/2} = \frac{q\ell^2}{2}$	$y_{\max} = y_{ z=\ell/2} = \frac{q\ell^4}{120EJ}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{5q\ell^3}{192EJ}$
	$A = B = \frac{q(\ell - a)}{2}$ $M_{\max} = M_{ z=\ell/2} = \frac{q\ell^2}{8} - \frac{qa^2}{6}$	$y_{\max} = y_{ z=\ell/2} = \frac{q\ell^4}{384EJ} \times \left(1 - \frac{8\xi^2}{5} + \frac{16\xi^4}{25}\right)$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{5q\ell^3}{24EJ} \times (1 - 2\xi^2 + \xi^3)$
	$A = -B = -\frac{\bar{M}_A}{\ell}$ $M_{\max} = \bar{M}_A$	$y_{\max} = y_{ z=0,423\ell} = \frac{\bar{M}_A \ell^2}{15,59EJ}$ $y_{ z=\ell/2} = \frac{\bar{M}_A \ell^2}{16EJ}$	$\theta_A = \frac{\bar{M}_A \ell}{3EJ}$ $\theta_B = -\frac{\bar{M}_A \ell}{6EJ}$
	$A = -\frac{Pa}{\ell}$ $B = P \frac{a + \ell}{\ell}$ $M_{\max} = -Pa$	$y_C = \frac{Pa^2(\ell + a)}{3EJ}$ <p>trong nhịp AB:</p> $y_{\max} = y_{ z=0,577\ell} = -0,0642 \frac{Pa\ell^2}{EJ}$	$\theta_C = \frac{P(2\ell a + 3a^2)}{6EJ}$ $\theta_A = -\frac{Pa\ell}{6EJ}$ $\theta_B = \frac{Pa\ell}{3EJ}$
	$A = -\frac{qa^2}{2\ell}$ $B = q \left(a + \frac{a^2}{2\ell} \right)$ $M_{\max} = -\frac{qa^2}{2}$	$y_C = \frac{qa^3}{24EJ}$ <p>trong nhịp AB:</p> $y_{\max} = y_{ z=0,577\ell} = -0,0321 \frac{qa^2 \ell^2}{EJ}$	$\theta_C = \frac{qa^2(a + 1)}{6EJ}$ $\theta_A = -\frac{qa^2 \ell}{12EJ}$ $\theta_B = \frac{qa^2 \ell}{6EJ}$

7. Kiểm tra bền

- + Kiểm tra bền đối với các phân tố làm việc ở trạng thái ứng suất đơn (ở mép biên trên và mép biên dưới của dầm, ứng suất tiếp bằng 0):

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_K \quad \sigma_{\min} \leq [\sigma]_N$$

trong đó: $[\sigma]_K$ và $[\sigma]_N$ lần lượt là ứng suất cho phép khi kéo và khi nén.

- + Kiểm tra bền đối với các phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng (ở vị trí có ứng suất pháp và ứng suất tiếp đều khá lớn). Đối với các phân tố này thường kiểm tra theo các thuyết bền:

- Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\sigma_{tt} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$$

- Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng:

$$\sigma_{tt} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$$

trong đó: σ_{tt} gọi là ứng suất tính toán.

- + Kiểm tra bền đối với phân tố trượt thuần túy (ở vị trí trục trung hoà, ứng suất pháp bằng 0). Đối với các phân tố này thường kiểm tra theo các thuyết bền:

- Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

- Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

8. Kiểm tra theo điều kiện cứng

$$y_{\max} \leq [f]$$

hoặc
$$\frac{y_{\max}}{\ell} \leq \left[\frac{f}{\ell} \right]$$

trong đó:

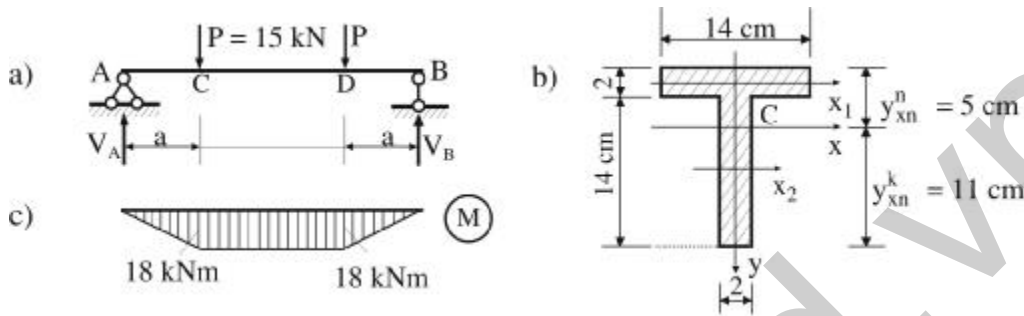
$[f]$ và $\left[\frac{f}{\ell} \right]$ lần lượt là độ võng cho phép và độ võng tương đối cho phép;

ℓ là nhịp dầm.

Thông thường $\left[\frac{f}{\ell} \right]$ cho bằng tỷ lệ %.

Ví dụ:

Kiểm tra bền (theo ứng suất pháp) cho dầm có sơ đồ chịu lực như trên hình 2.4.10 a, biết dầm làm từ thép CT3 có $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$; $P = 15 \text{ kN}$; $a = 1,2 \text{ m}$. Mặt cắt có $J_x = 1362,67 \text{ cm}^4$, các kích thước khác cho trên hình 2.4.10.



Hình 2.4.10

+ Vẽ biểu đồ mô men uốn M_x

Do dầm và tải trọng đối xứng của dầm nên các phản lực gối tựa

$$V_A = V_B = P = 15 \text{ kN}.$$

Biểu đồ mô men uốn M_x vẽ được bằng cách tính nhanh giá trị mô men tại đầu các đoạn thanh như trên hình 2.4.10 c. Từ biểu đồ M_x có thể thấy đoạn dầm CD chịu uốn thuần túy với mô men uốn có trị không đổi $M_x = 18 \text{ kNm}$ và làm căng mặt dưới của dầm.

+ Kiểm tra bền cho dầm theo ứng suất pháp lớn nhất:

- Kiểm tra cho điểm có ứng suất kéo lớn nhất $\max \sigma_z^k$ (mặt dưới dầm trong đoạn CD):

$$y_{xn}^k = 11 \text{ cm}; \quad y_{xn}^n = 5 \text{ cm};$$

$$W_x^k = \frac{1362,67}{11} = 123,88 \text{ cm}^3; \quad W_x^n = \frac{1362,67}{5} = 272,53 \text{ cm}^3$$

$$\max \sigma_z^k = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x^k} = \frac{14,4 \cdot 10^{-3}}{123,88 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 116,24 \text{ MN/m}^2 < [\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$$

Vậy dầm đảm bảo độ bền khi chịu ứng suất kéo.

- Kiểm tra cho điểm có ứng suất nén lớn nhất $\max \sigma_z^n$ (mặt trên dầm trong đoạn CD):

$$\max \sigma_z^n = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x^n} = \frac{14,4 \cdot 10^{-3}}{272,53 \cdot 10^{-6}} = 52,84 \text{ MN/m}^2 < [\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$$

Vậy dầm đảm bảo độ bền khi chịu ứng suất nén.

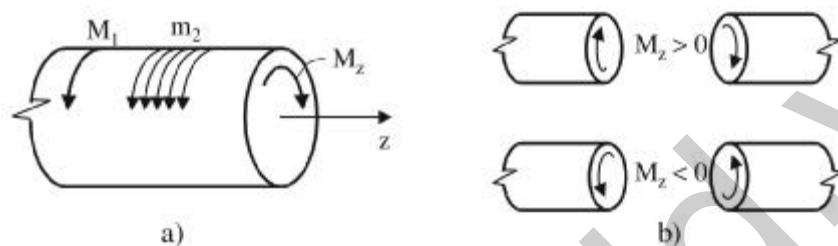
2.4.3. Tính thanh chịu xoắn

1. Nội lực trên mặt cắt ngang

Mômen xoắn M_z .

2. Quy ước dấu của mô men xoắn

$M_z > 0$ nếu từ ngoài nhìn vào mặt cắt nó có chiều quay thuận chiều kim đồng hồ (hình 2.4.11).



Hình 2.4.11: Nội lực trên mặt cắt ngang

3. Ứng suất trên mặt cắt ngang

a. Thanh có mặt cắt tròn

$$\tau_\rho = \frac{M_z}{J_\rho} \rho$$

và
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} \tag{2.4.11}$$

trong đó:

ρ - khoảng cách của điểm tính ứng suất đến tâm vòng tròn;

J_ρ - mô men quán tính cực của mặt cắt.

Với mặt cắt tròn (hình 2.4.12a):

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4$$

Với mặt cắt hình vành khăn (hình 2.4.12b):

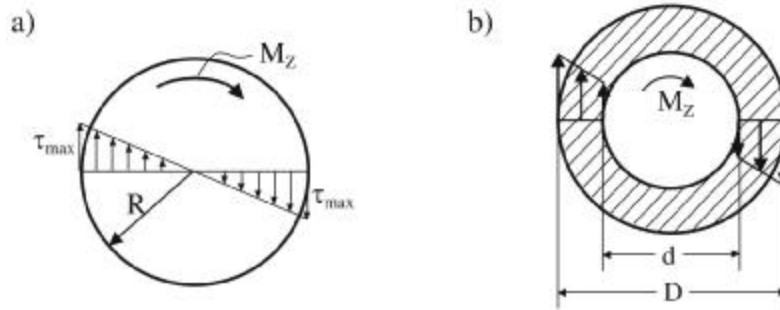
$$J_\rho = \frac{\pi D^4 (1 - \eta^4)}{32} \approx 0,1D^4 (1 - \mu^4),$$

$$\eta = \frac{d}{D}.$$

W_ρ - mô đun chống xoắn của mặt cắt tròn.

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{R}.$$

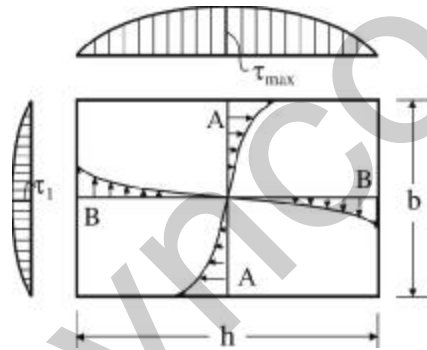
Trên mặt cắt ngang biểu đồ ứng suất tiếp có dạng bậc nhất (hình 2.4.12a).



Hình 2.4.12: Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang hình tròn

b. Thanh mặt cắt chữ nhật

Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang của thanh mặt cắt chữ nhật có dạng nh trên hình 2.4.13.



Hình 2.4.13: Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang hình chữ nhật

Trên biểu đồ các trị τ_{\max} và τ_1 được tính bằng công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha h b^2} \quad (2.4.12)$$

$$\tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (2.4.13)$$

trong đó: α , β , γ là các hệ số phụ thuộc vào tỷ số h/b với quy định là $h > b$ tra trong bảng 2.4.3.

Bảng 2.4.3: Các hệ số α , β , γ đối với thanh chữ nhật

h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	> 10
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,820	0,759	0,776	0,753	0,743	0,742	0,742

Ghi chú: Khi $h/b > 10$ có thể lấy $\alpha = \beta = 0,333$.

4. Biến dạng

a. Thanh mặt cắt tròn

+ Góc xoắn tỷ đối :

$$\theta = \frac{M_Z}{GJ_\rho} \quad (2.4.14)$$

+ Góc xoắn tương đối giữa 2 mặt cắt cách nhau một đoạn ℓ :

$$\varphi = \int_0^\ell \frac{M_Z}{GJ_\rho} dz \quad (2.4.15)$$

+ Với thanh được chia thành n đoạn:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} \frac{M_{Z_i}}{GJ_{\rho_i}} dz \quad (2.4.16)$$

trong đó:

M_{Z_i} - mô men xoắn của đoạn thứ i ;

J_{ρ_i} - mô men quán tính cực của mặt cắt ngang ứng với đoạn thứ i .

+ Với thanh có M_{Z_i} và J_{ρ_i} là hằng số thì:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{Z_i} \ell_i}{GJ_{\rho_i}} \quad (\text{rad}) \quad (2.4.17)$$

b. Thanh mặt cắt chữ nhật

$$\theta = \frac{M_Z}{\beta G h b^3} \quad (2.4.18)$$

trong đó: β tra trong bảng 2.4.3.

5. Kiểm tra theo điều kiện bền

$$\tau_{\max} = \frac{M_Z}{W_\rho} \leq [\tau]$$

trong đó:

$$[\tau] = \frac{\tau_0}{n};$$

τ_0 được xác định từ thí nghiệm;

n là hệ số an toàn.

$[\tau]$ cũng có thể xác định từ $[\sigma]$ theo các thuyết bền.

+ Theo thuyết bền thế năng:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

+ Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

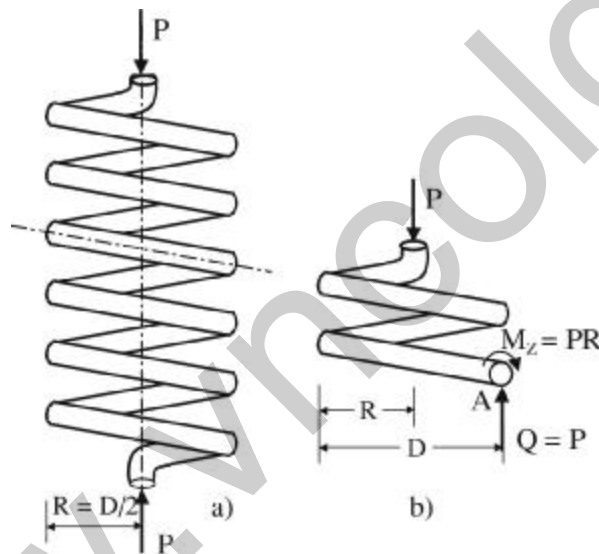
$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

6. Kiểm tra theo điều kiện cứng

$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

trong đó $[\theta]$ là biến dạng tỷ đối cho phép tính bằng đơn vị độ/m ($^{\circ}/m$) hoặc rad/m

7. Tính lò xo hình trụ b- ốc ngắn (hình 2.4.14)



Hình 2.4.14: Lò xo hình trụ bước ngắn 7

+ Phạm vi áp dụng: Góc nghiêng α của vòng lò xo với trục lò xo lớn hơn 80° .

+ Nội lực trên mặt cắt ngang:

$$M_z = P \frac{D}{2};$$

$$Q = P$$

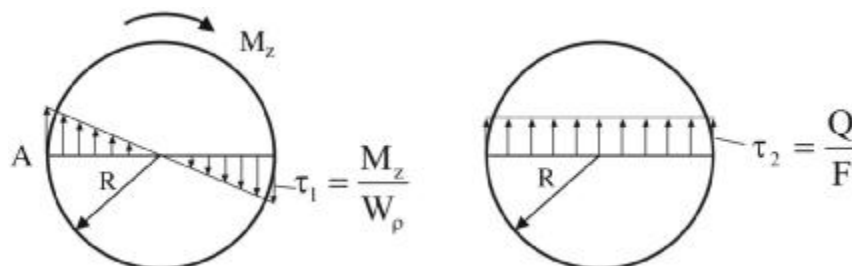
+ Ứng suất trên mặt cắt ngang:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_z}{J_{\rho}} \rho$$

và

$$\tau_1 = \frac{M_z}{W_{\rho}} \quad \tau_2 = \frac{Q}{F} \quad (2.4.19)$$

Biểu đồ phân bố của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang do M_z và Q gây ra như trên hình 2.4.15.



Hình 2.4.15: Phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang

Điểm chịu lực nguy hiểm nhất trong lò xo là điểm A ở mép trong của vòng lò xo, tại đó τ_1 do M_z và τ_2 do Q gây ra có cùng phương và chiều:

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{P \frac{D}{2}}{0,2d^3} + \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \left(\frac{1,6d}{\pi d} + 1 \right) \frac{PD}{0,4d^3} \quad (2.4.20)$$

+ Độ cứng của lò xo:

Độ lún λ của lò xo được xác định bằng công thức:

$$\lambda = \frac{P}{C} \quad (2.4.21)$$

với
$$C = \frac{Gd^4}{8nD^3} \quad (2.4.22)$$

trong đó:

n - số vòng lò xo;

C - độ cứng của lò xo.

Lò xo có d càng nhỏ, n càng lớn thì độ lún càng lớn.

2.4.4. Tính thanh chịu lực phức tạp

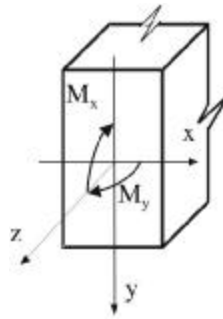
2.4.4.1. Uốn xiên

1. Nội lực trên mặt cắt ngang:

Mô men uốn M_x và M_y .

2. Quy - ước dấu

M_x , M_y lấy dấu dương nếu chúng làm căng các thớ ở phía dương của trục tọa độ (hình 2.4.16).



Hình 2.4.16

3. Ứng suất trên mặt cắt ngang

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (2.4.23)$$

hoặc dùng công thức kỹ thuật:

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{J_y} |x| \quad (2.4.24)$$

Dấu của các số hạng trong công thức (2.4.23) được lấy theo dấu của 4 đại lượng M_x , M_y , x , y . Còn dấu của các số hạng trong công thức (2.4.24) được lấy theo phân vùng ứng suất dựa vào chiều căng của mô men M_x , M_y tương tự như ở trường hợp uốn phẳng (mục 2.4.2).

4. Đường trung hoà và biểu đồ ứng suất (hình 2.4.17)

+ Phương trình đường trung hoà

Vì mọi điểm trên đường trung hoà đều có ứng suất pháp bằng 0, nên từ công thức tính ứng suất (2.4.23) suy ra:

$$y = -\frac{M_y J_x}{M_x J_y} x \quad (2.4.25)$$

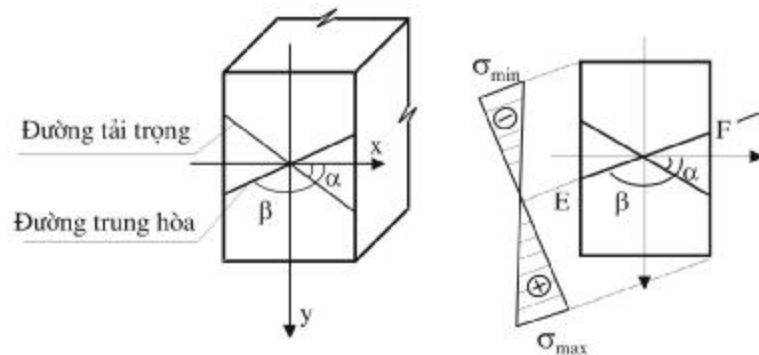
Điểm cần chú ý là ở dầm uốn xiên, trừ trường hợp mặt cắt ngang có $J_x = J_y$ ra đường trung hoà không vuông góc với đường tải trọng như ở trường hợp uốn phẳng, tức là:

$$\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha \neq -1,$$

trong đó:

β - góc nghiêng của đường trung hoà;

α - góc nghiêng của đường tải trọng (hình 2.4.17).



Hình 2.4.17

+ Biểu đồ ứng suất:

Vì ở trường hợp uốn xiên ứng suất ở một điểm tỷ lệ bậc nhất với khoảng cách từ điểm đó đến trục trung hoà nên có thể vẽ biểu đồ ứng suất ở dạng phẳng tương tự như ở trường hợp uốn phẳng (hình 2.4.17).

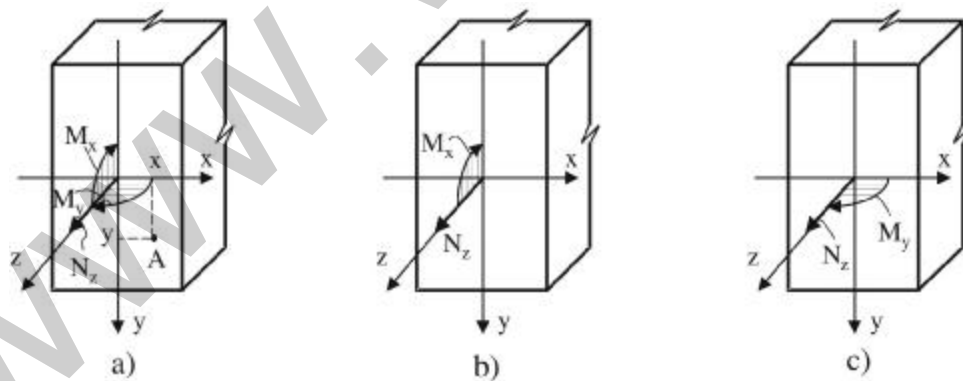
5. Kiểm tra bền

Tiến hành kiểm tra ở các điểm nguy hiểm trên mặt cắt theo các thuyết bền giới thiệu ở mục 2.2.2.

2.4.4.2. Uốn và nén (kéo) đồng thời - Nén (kéo) lệch tâm

1. Nội lực trên mặt cắt ngang

N_z, M_x, M_y hoặc N_z, M_x hoặc N_z, M_y như trên hình 2.4.18.

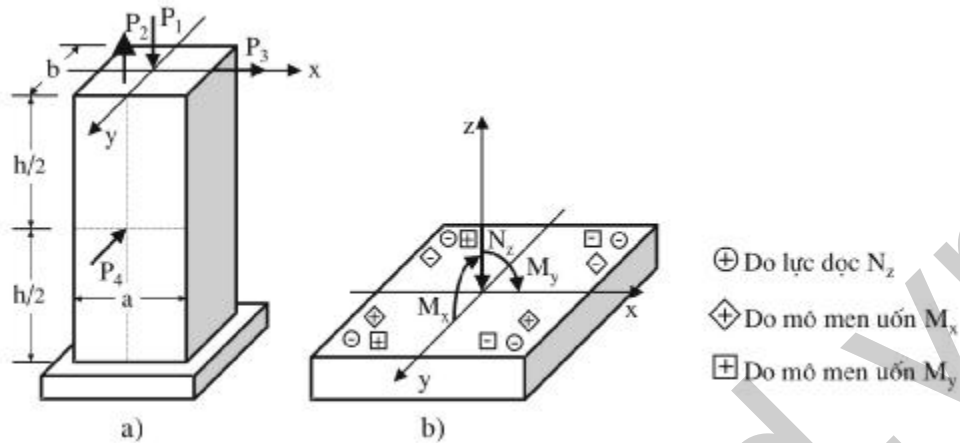


Hình 2.4.18

2. Quy - ước dấu mô men

Lực dọc lấy dấu dương nếu là lực kéo. Mô men lấy dấu dương nếu làm căng các thớ ở phía dương của trục tọa độ (hình 2.4.18).

3. Ứng suất trên mặt cắt ngang



Hình 2.4.19

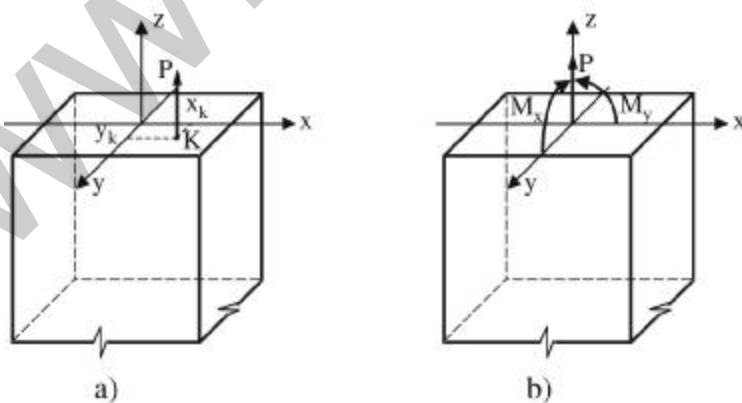
$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (2.4.26)$$

hoặc dùng công thức kỹ thuật:

$$\sigma_z = \pm \frac{|N_z|}{F} \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{J_y} |x| \quad (2.4.27)$$

Dấu của các số hạng trong công thức (2.4.27) được lấy dựa vào phân vùng ứng suất do lực dọc và mô men gây ra như trên hình 2.4.19.

4. Nén (kéo) lệch tâm (hình 2.4.20 a)



Hình 2.4.20

Được đưa về trường hợp chịu nén (kéo) đồng thời (hình 2.4.20b) với

$$N_z = P, \quad M_x = Py_k, \quad M_y = Px_k.$$

5. Đường trung hoà và biểu đồ ứng suất

+ Phương trình đường trung hoà

Vì mọi điểm trên trục trung hoà có ứng suất pháp bằng 0 nên từ công thức (2.4.26) có thể rút ra phương trình trục trung hoà tương tự như ở trường hợp uốn xiên.

Với trường hợp nén (kéo) lệch tâm phương trình đường trung hoà được đưa về dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (2.4.28)$$

với:
$$a = -\frac{i_y^2}{x_K} \quad \text{và} \quad b = -\frac{i_x^2}{y_K} \quad (2.4.29)$$

trong đó:

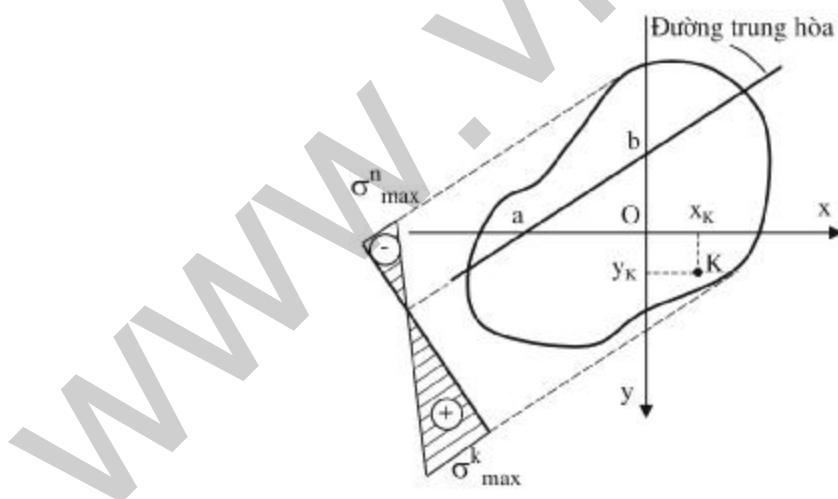
x_K, y_K - toạ độ của điểm đặt lực lệch tâm;

i_x, i_y - bán kính quán tính chính trung tâm.

Từ (2.4.29) có thể thấy a và b luôn trái dấu với x_K và y_K nên đường trung hoà luôn nằm ở góc phần tư đối diện với góc phần tư chứa điểm đặt lực (hình 2.4.21).

+ Biểu đồ ứng suất:

Vì ở trường hợp uốn và nén (kéo) hoặc nén (kéo) lệch tâm ứng suất ở một điểm tỷ lệ bậc nhất với khoảng cách từ điểm đó đến trục trung hoà nên có thể vẽ biểu đồ ứng suất ở dạng phẳng tương tự như ở trường hợp uốn xiên (hình 2.4.21).



Hình 2.4.21

6. Kiểm tra bền

Tiến hành kiểm tra ở các điểm nguy hiểm trên mặt cắt theo các thuyết bền giới thiệu ở mục 2.2.2.

7. Lõi của mặt cắt ngang

+ *Định nghĩa:*

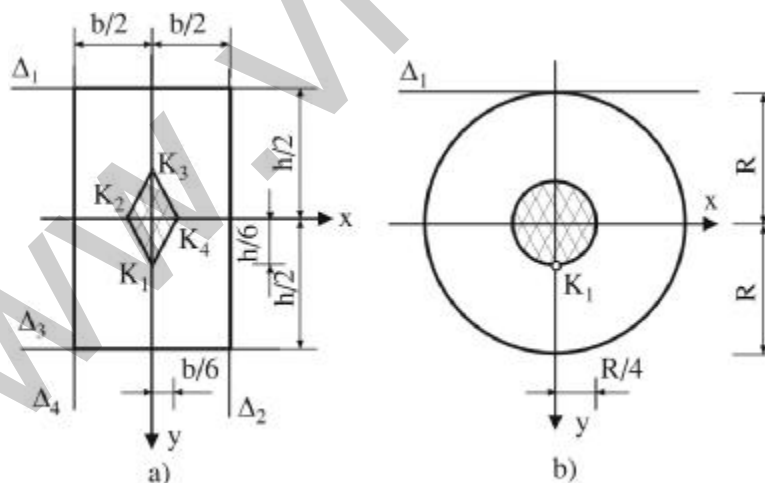
Lõi của mặt cắt là miền có chu vi khép kín bao quanh trọng tâm mặt cắt. Nếu lực dọc lệch tâm đặt trong hoặc trên chu vi lõi thì trên mặt cắt chỉ xuất hiện ứng suất cùng dấu với lực dọc.

+ *Ứng dụng:*

Lõi mặt cắt được dùng nhiều trong việc thiết kế các cấu kiện chịu nén như cột, tường, vòm v.v... làm bằng các vật liệu giòn như gạch, đá hoặc bê tông để trên mặt cắt không xuất hiện ứng suất kéo bằng cách khống chế vị trí đặt lực lệch tâm trong lõi.

+ *Cách vẽ lõi:*

Biết biên của lõi là vị trí của các điểm đặt lực khi đường trung hoà tiếp xúc với chu vi của mặt cắt. Do đó để vẽ lõi lần lượt vẽ các tiếp tuyến với chu vi của mặt cắt (hình 2.4.22). Chú ý là không một tiếp tuyến nào được cắt mặt cắt. Vì mỗi tiếp tuyến là một đường trung hoà và ứng với nó có một cặp giá trị a_i, b_i , từ đó thay vào (2.4.29) tính được một cặp tọa độ của điểm đặt lực x_k, y_k . Nối các điểm có tọa độ x_k, y_k lại bằng các đoạn thẳng nếu mặt cắt là đa giác và bằng các đoạn cong nếu mặt cắt có chu vi là các đường cong sẽ được một chu vi khép kín bao quanh trọng tâm mặt cắt, đó là lõi của mặt cắt. *Lõi mặt cắt bao giờ cũng là đa giác lõi hoặc đường cong lõi.* Nếu mặt cắt có trục đối xứng thì trục đối xứng đó cũng là trục đối xứng của lõi.

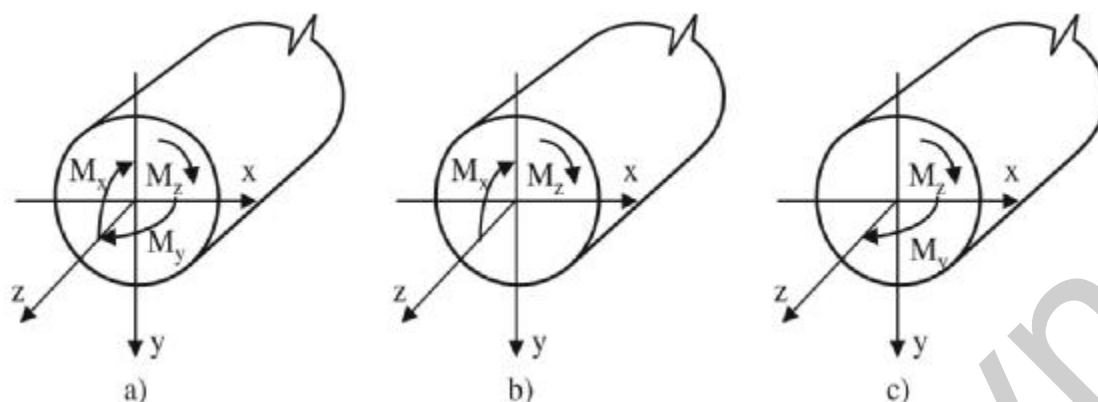


Hình 2.4.22

2.4.4.3. Uốn và xoắn đồng thời

1. Nội lực trên mặt cắt ngang

M_x, M_y, M_z hoặc M_x, M_z hoặc M_y, M_z với quy ước dấu dương như trên hình 2.4.23.



Hình 2.4.23

2. Ứng suất trên mặt cắt ngang

+ Ứng suất pháp do M_x , M_y gây ra:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

+ Ứng suất tiếp do M_z gây ra: Tùy theo mặt cắt là hình tròn hay hình chữ nhật mà tính toán bằng các công thức trình bày trong mục (2.4.3).

3. Kiểm tra bền

Tiến hành kiểm tra ở các điểm nguy hiểm trên mặt cắt theo các thuyết bền giới thiệu ở mục 2.2.2.

2.4.4.4. Trường hợp chịu lực tổng quát

Trường hợp chịu lực tổng quát là tổ hợp của các trường hợp chịu kéo (nén), uốn xiên, xoắn. Tùy theo hình dạng mặt cắt là tròn hay chữ nhật mà sử dụng các công thức tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp phù hợp như đã trình bày ở trên.

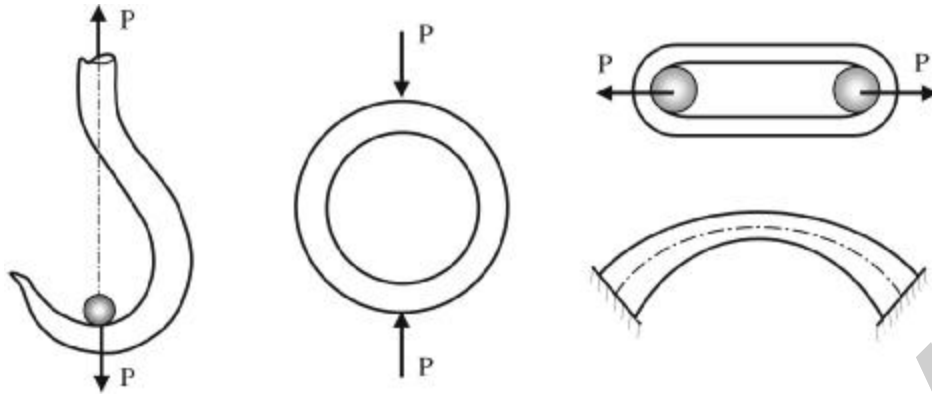
2.4.4.5 Thanh cong phẳng

1. Khái niệm

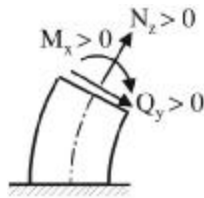
Thanh cong phẳng là thanh có trục là một đường cong phẳng. Chẳng hạn như móc neo của cần cầu, vành các bánh xe, vòng mắt xích, vòm, v.v... (hình 2.4.24).

2. Nội lực trên mặt cắt ngang

Trường hợp tổng quát có thể xuất hiện ba thành phần nội lực N_z , M_x , Q_y như trên hình 2.4.25.



Hình 2.4.24



Hình 2.4.25

3. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang

- Do lực dọc gây ra:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F}$$

- Do mô men uốn gây ra:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{S_x} \frac{y}{r+y} \quad (2.4.31)$$

trong đó:

- S_x - mô men tĩnh của mặt cắt đối với trục trung hoà x;
- r - bán kính của thớ trung hoà;
- y - khoảng cách từ điểm tính ứng suất đến trục trung hoà.

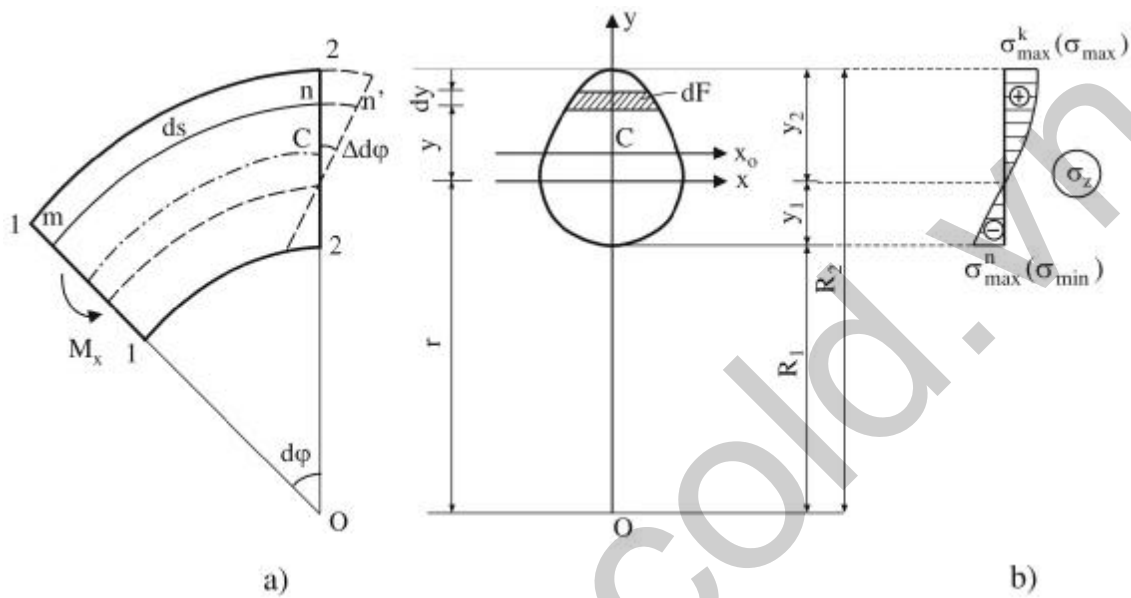
Biểu đồ ứng suất trên mặt cắt ngang có dạng đường cong (hình 2.4.26) với

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_x}{S_x} \frac{y_2}{r+y_2} = \frac{M_x}{S_x} \frac{y_2}{R_2} \\ \sigma_{\min} &= \frac{M_x}{S_x} \frac{y_1}{r+y_1} = \frac{M_x}{S_x} \frac{y_1}{R_1} \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

trong đó:

R_1 - bán kính cong của thớ gần tâm cong nhất, $R_1 = r + y_1$;

R_2 - bán kính cong của thớ xa tâm cong nhất, $R_2 = r + y_2$;

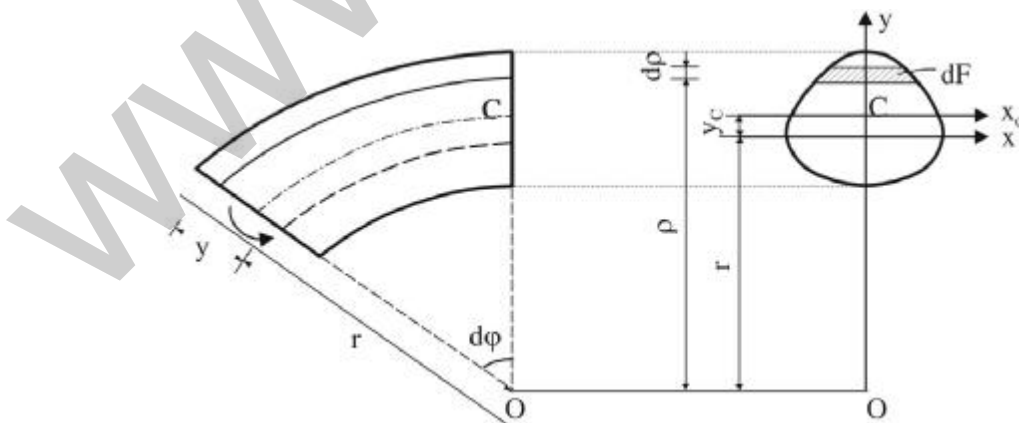


Hình 2.4.26

+ Vị trí trục trung hoà (hình 2.4.27):

Bán kính cong của thớ trung hoà được tính bằng công thức:

$$r = \frac{F}{\int \frac{dF}{\rho}} \quad (2.4.33)$$

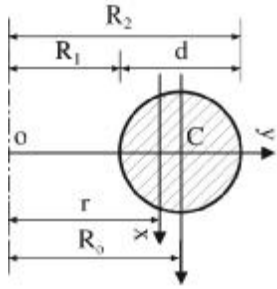
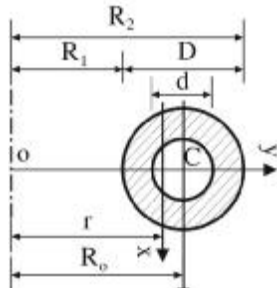
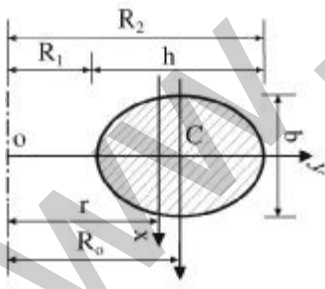
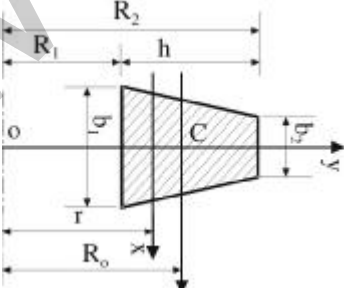


Hình 2.4.27

Bán kính cong của thớ trung hoà của các mặt cắt thường gặp cho trong bảng 2.4.4.

- + Kiểm tra bền: Tiến hành kiểm tra ở các điểm nguy hiểm trên mặt cắt theo các thuyết bền giới thiệu ở mục 2.2.2.

Bảng 2.4.4: Bán kính cong của thớ trung hoà

Dạng mặt cắt	Bán kính cong r của thớ trung hoà
	$r = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}$
	$r = \frac{D^2 - d^2}{8 \left(\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}} \right)}$
	$r = \frac{h^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - b^2})}$
	$r = \frac{(b_1 + b_2)h^2}{2 \left[(b_1R_2 - b_2R_1) \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2)h \right]}$

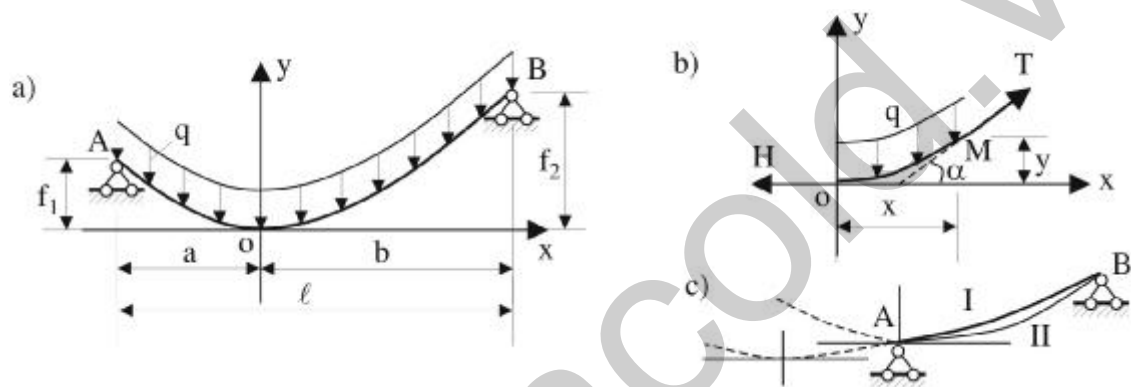
2.4.5. Tính dây mềm

1. Khái niệm

Dây mềm chỉ chịu được lực kéo, có nghĩa là nội lực trong dây $N_z \geq 0$. Gọi f là độ võng lớn nhất và ℓ là chiều dài nhịp thì dây được coi là thoải khi: $f/\ell \leq 1/10$, còn dây được coi là chùng khi $f/\ell > 1/10$.

2. Phương pháp gần đúng tính dây mềm chịu tải trọng phân bố đều

+ Dây mềm trên 2 gối tựa chênh nhau (hình 2.4.29)



Hình 2.4.29: Dây mềm trên hai gối chênh nhau

- Phương trình đường cong dây:

$$y = \frac{qx^2}{2H} \tag{2.4.34}$$

- Lực căng ngang của dây:

$$H = \frac{q\ell^2}{2(\sqrt{f_2} \pm \sqrt{f_1})^2} \tag{2.4.35}$$

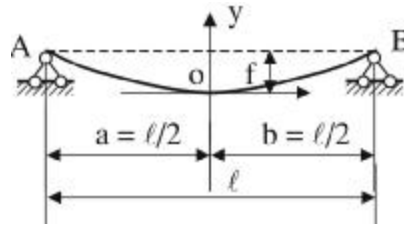
trong đó: $f_1 = \frac{qa^2}{2H}$; $f_2 = \frac{qb^2}{2H}$.

Trong công thức (2.4.35) lấy dấu (+) với trường hợp vẽ trên hình 2.4.29 a còn lấy dấu (-) với trường hợp vẽ trên hình 2.4.29 c.

- Lực căng của dây tại mặt cắt bất kỳ:

$$T = \frac{H}{\cos \alpha}$$

+ Dây mềm trên hai gối ngang nhau (hình 2.4.30):



Hình 2.4.30: Dây mềm trên hai gối ngang nhau

$$f_1 = f_2 = f = \frac{q\ell^2}{8H}$$

- Lực căng ngang:

$$H = \frac{q\ell^2}{32f} \quad (2.4.37)$$

- Độ dài dây:

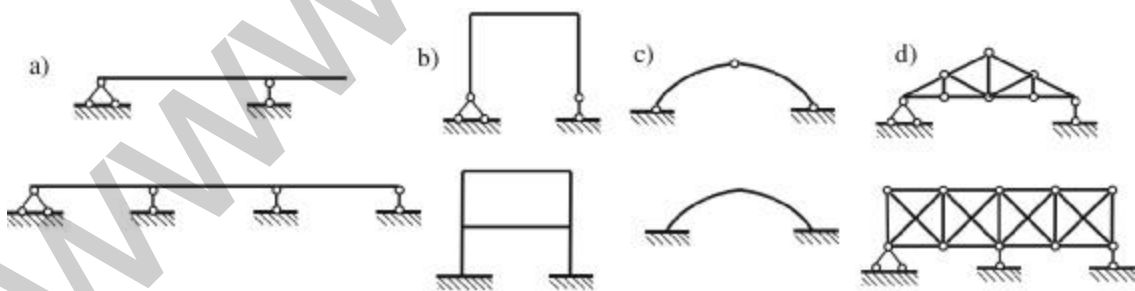
$$s = \ell \left(1 + \frac{8f^2}{3\ell^2} \right) \quad (2.4.38)$$

3. Kiểm tra bền

Thực hiện như thanh chịu kéo đúng tâm.

2.5. TÍNH KẾT CẤU HỆ THANH

Trong các công trình thủy lợi, giao thông, xây dựng dân dụng, kết cấu hệ thanh thường gặp năm dạng: Dầm, khung, vòm, dàn như hình 2.5.1 a, b, c, d và hệ liên hợp.



Hình 2.5.1

Nguyên nhân gây ra phản lực, nội lực, chuyển vị trên công trình là tải trọng, lún không đều và nhiệt độ. Vì sự thay đổi của nhiệt độ rất ít khi kể đến khi tính toán các kết cấu hệ thanh nên dưới đây chỉ xét nguyên nhân tác dụng là tải trọng và chuyển vị của các liên kết tựa. Cần đi sâu vấn đề gì, độc giả xem thêm giáo trình Cơ học kết cấu của các trường đại học kỹ thuật.

Ngày nay với sự phát triển của máy tính và các phần mềm được xây dựng sẵn trên cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), việc tính toán chuyển vị và nội lực của kết cấu hệ thanh chịu tác dụng của các nguyên nhân kể trên thuận tiện và dễ dàng hơn nhiều. Song trong nhiều trường hợp vẫn cần sử dụng các phương pháp truyền thống. Dưới đây sẽ giới thiệu những nét chính của các phương pháp này. Phương pháp phần tử hữu hạn sẽ được trình bày trong mục 2.11.

2.5.1. Tính kết cấu tĩnh định chịu tải trọng bất động

2.5.1.1. Tính nội lực

Hệ tĩnh định là hệ bất biến hình có vừa đủ số liên kết. Với hệ tĩnh định dùng các phương trình cân bằng tĩnh học đủ để xác định được phản lực và nội lực của hệ. Trong hệ tĩnh định tác động của nhiệt độ và chuyển vị của các liên kết tựa chỉ gây ra chuyển vị, không gây ra nội lực.

Để vẽ biểu đồ nội lực (mô men, lực cắt, lực dọc) cần thực hiện các bước sau:

1. Xác định phản lực

Giả thiết chiều các phản lực, thiết lập các phương trình cân bằng giữa tải trọng và phản lực, từ đó giải tìm phản lực. Nếu kết quả mang dấu âm thì chiều thực của phản lực phải ngược với chiều giả thiết. Để kiểm tra phản lực tính đúng hay sai phải thử lại bằng cách thay các phản lực tính được vào phương trình cân bằng chưa dùng xem có thỏa mãn không.

2. Chia hệ thành các đoạn

Các điểm chia là các điểm đặt lực hoặc mô men tập trung và điểm gián đoạn của tải trọng phân bố.

3. Dùng phương pháp mặt cắt để tìm nội lực tại đầu các đoạn thanh

$$M_K = \Sigma M_K \quad (\text{các ngoại lực một phần xét})$$

$$Q_K = \Sigma Y \quad (\text{các ngoại lực một phần xét})$$

$$N_K = \Sigma Z \quad (\text{các ngoại lực một phần xét})$$

trong đó: trục Y có phương vuông góc và trục Z có phương trùng với trục của đoạn thanh đang xét.

4. Từ giá trị nội lực tại các đầu thanh và sử dụng các nhận xét rút ra từ liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực vẽ biểu đồ nội lực của từng đoạn thanh của hệ. Chú ý là với mô men luôn quy ước dấu theo thứ căng và khi vẽ phải vẽ theo đúng thứ căng.

2.5.1.2. Dầm tĩnh định

Dầm tĩnh định thường được chia làm ba dạng:

- + Dầm đơn giản (công xôn, hai đầu tựa khớp hoặc mút thừa);
- + Dầm tĩnh định nhiều nhịp (dầm ghép);
- + Dầm có mắt truyền lực.

Cách vẽ biểu đồ nội lực cho dầm đơn giản đã trình bày ở mục 2.4. Ở đây chỉ lưu ý là nên sử dụng cách vẽ nhanh. Với biểu đồ mô men uốn tìm giá trị mô men ở hai đầu đoạn thanh và dùng cách treo biểu đồ. Còn biểu đồ lực cắt thì được suy từ biểu đồ mô men.

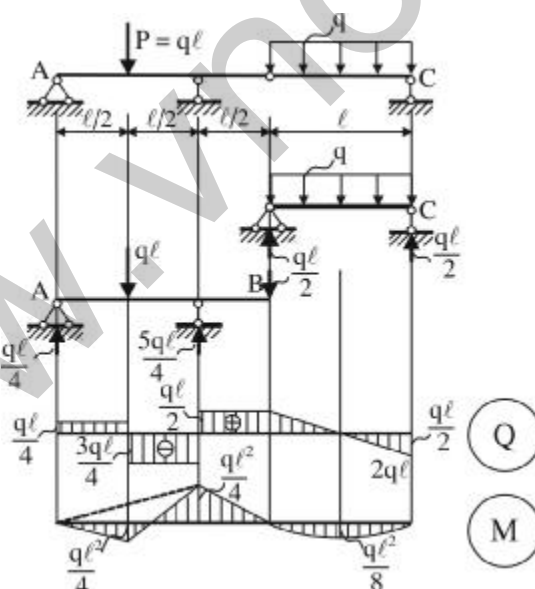
Với dầm tĩnh định nhiều nhịp (dầm ghép) để vẽ biểu đồ nội lực thực hiện như sau: Xác định dầm chính, dầm phụ, tính dầm phụ trước dầm chính sau, khi tính dầm chính lưu ý kể thêm áp lực truyền từ dầm phụ xuống (chỉ cần đổi chiều phản lực từ dầm phụ đã biết).

Với dầm có mắt truyền lực thứ tự tính toán là: Xác định phản lực của các dầm dọc phụ phía trên, đổi chiều phản lực là áp lực tác dụng trực tiếp vào dầm chính bên dưới và tính dầm chính như dầm đơn giản hay dầm ghép.

Ví dụ:

Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm ghép trên hình 2.5.2

- Xác định dầm chính, dầm phụ:
 - AB là dầm chính;
 - BC là dầm phụ.
- Tính hai dầm độc lập theo thứ tự dầm phụ tính trước, dầm chính tính sau. Sơ đồ tính toán và kết quả như hình 2.5.2.



Hình 2.5.2: Biểu đồ nội lực của dầm tĩnh định hai nhịp

2.5.1.3. Khung tĩnh định

Khung tĩnh định có 3 dạng: Khung một miếng cứng, khung 3 khớp và khung ghép. Cách vẽ biểu đồ nội lực cho khung một miếng cứng, khung ghép thực hiện giống như dầm đơn giản và dầm ghép. Với khung 3 khớp cần lưu ý cách xác định phản lực.

Ví dụ:

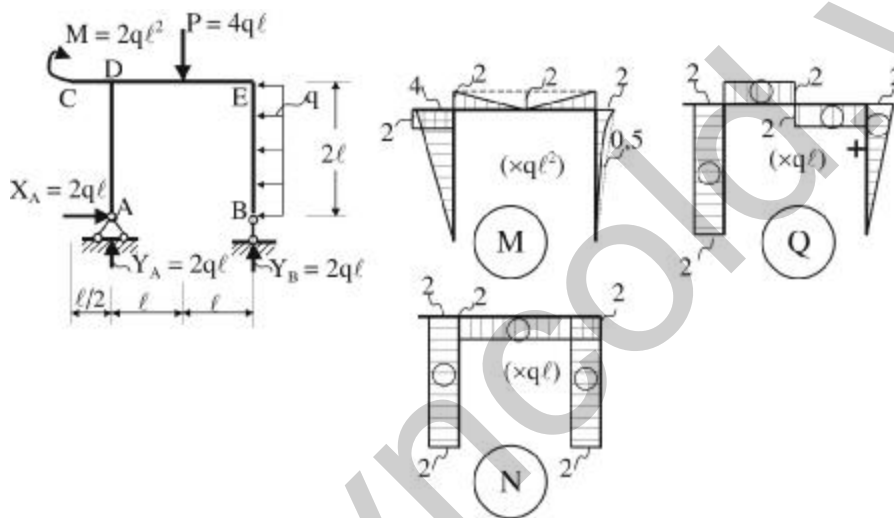
Vẽ biểu đồ nội lực cho khung một miếng cứng có kích thước và chịu lực như hình 2.5.3.

- Xác định phản lực:

$$\Sigma X = 0 \rightarrow X_A = 2q\ell \quad (\rightarrow)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow Y_B = 2q\ell \quad (\uparrow)$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow Y_A = 2q\ell \quad (\uparrow)$$



Hình 2.5.3: Biểu đồ nội lực của khung

- Vẽ biểu đồ nội lực:

Chia khung thành 4 đoạn AC, CD, DE, EF. Tính nội lực tại đầu mút mỗi đoạn và vẽ nhanh biểu đồ nội lực cho từng đoạn..

Sau khi vẽ kiểm tra biểu đồ M theo điều kiện cân bằng mô men tại nút D và E. Biểu đồ Q có dạng nhỏ hơn dạng của biểu đồ M một bậc. Biểu đồ N là hằng số trong từng đoạn thành vì tải trọng vuông góc với trục thanh.

2.5.1.4. Vòm ba khớp (hình 2.5.4)

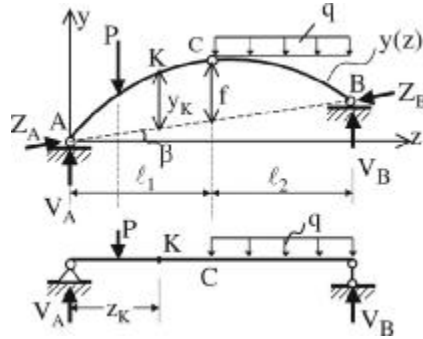
- Xác định các phản lực Z_A, V_A, Z_B, V_B như khung ba khớp:

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow V_B;$$

$$\Sigma M_C^f = 0 \rightarrow Z_B;$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow Z_A;$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A.$$



Hình 2.5.4

- Trường hợp hay gặp là tải trọng tác dụng thẳng đứng không phụ thuộc vào dạng vòm. Lúc này nội lực M , Q , N tại mặt cắt bất kỳ K của vòm được xác định theo công thức liên hệ với dầm đơn giản cùng nhịp chịu cùng tải trọng:

$$\begin{cases} M_K = M_K^d - Hy_K \\ Q_K = Q_K^d \cos \varphi_K - H(\sin \varphi_K - \operatorname{tg} \beta \cos \varphi_K) \\ N_K = Q_K^d \sin \varphi_K + H(\cos \varphi_K + \operatorname{tg} \beta \sin \varphi_K) \end{cases} \quad (2.5.1)$$

trong đó:

M_K^d , Q_K^d - mô men uốn, lực cắt tại mặt cắt K tương ứng của dầm đơn giản cùng nhịp cùng tải trọng;

H - lực xô ngang của vòm, $H = Z_A \cos \beta = Z_B \cos \beta$

$$H = \frac{M_C^d}{f}$$

y_K - khoảng cách thẳng đứng từ mặt cắt K đến đường nối AB ;

φ_K - góc nghiêng giữa tiếp tuyến trực vòm tại K so với phương ngang;

β - góc nghiêng của đường nối AB với phương ngang.

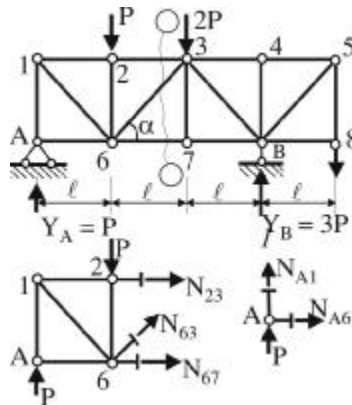
Chú ý là với vòm dẫu của lực dọc N được quy ước lại: Nén mang dấu dương, kéo mang dấu âm.

2.5.1.5. Dàn tĩnh định

Dàn cũng có hình thức như khung: Dàn dầm (một miếng cứng), dàn ba khớp, dàn ghép. Trong bước tính toán sơ bộ thường bỏ qua trọng lượng các thanh dàn, giao của các thanh dàn coi là khớp lý tưởng, tải trọng chỉ tác dụng tại các mắt dàn. Với giả thiết như vậy nội lực trong dàn chỉ có lực dọc N . Để xác định lực dọc có thể dùng phương pháp giải tích (xét cân bằng lực tại một mắt hoặc một phía của dàn) hoặc phương pháp đồ giải (giản đồ Mác-xoen - Cờ-rê-mô-na).

Ví dụ:

Xác định lực dọc trong 4 thanh dầm 1A, 23, 63 và 67 trên hình 2.5.5.



Hình 2.5.5

- Xác định phản lực tại A, B như đối với dầm:

$$Y_A = P (\uparrow)$$

$$Y_B = 3P (\uparrow)$$

- Từ nhận xét của phương pháp tách mắt ta thấy lực dọc trong các thanh A6, 37, 4B, B8 bằng không.

Hai nhận xét quan trọng dùng khi tính dầm là:

- + Tại mặt cắt chỉ có hai thanh, không có lực thì lực dọc 2 thanh bằng không.
- + Tại mặt cắt có 3 thanh, trong đó có 2 thanh thẳng hàng, không có lực tác dụng thì lực dọc trong thanh không thẳng hàng bằng không.

- Tách mắt A:

$$\sum Y = N_{A1} + P = 0 \rightarrow N_{A1} = -P (\text{nén})$$

- Dùng mặt cắt 1-1, thay tác dụng thanh bị cắt bằng các ẩn lực dọc gây kéo, có chiều đi ra khỏi phần xét. Xét cân bằng của phần trái và sử dụng 3 phương trình cân bằng ta có:

$$\sum Y = N_{63} \sin \alpha + P - P = 0 \rightarrow N_{63} = 0$$

$$\sum M_6 = + p l + N_{23} l \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow N_{23} = -P \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\sum M_3 = + p 2l - p l - N_{67} l \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow N_{67} = +P \operatorname{cotg} \alpha$$

2.5.1.6. Tính chuyển vị trong hệ tĩnh định

Dưới đây trình bày công thức Mor và nhân biểu đồ Vê-rê-sa-ghin để tính chuyển vị cho một số dạng của hệ thanh phẳng có độ cong nhỏ $\left(\frac{h}{\rho} \leq \frac{1}{10}\right)$.

1. Dầm, khung chịu tác dụng của tải trọng

$$\Delta_{KP} = \overline{M}_K \cdot M_P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{EJ_i} \Omega_P^i y_K^i \tag{2.5.2}$$

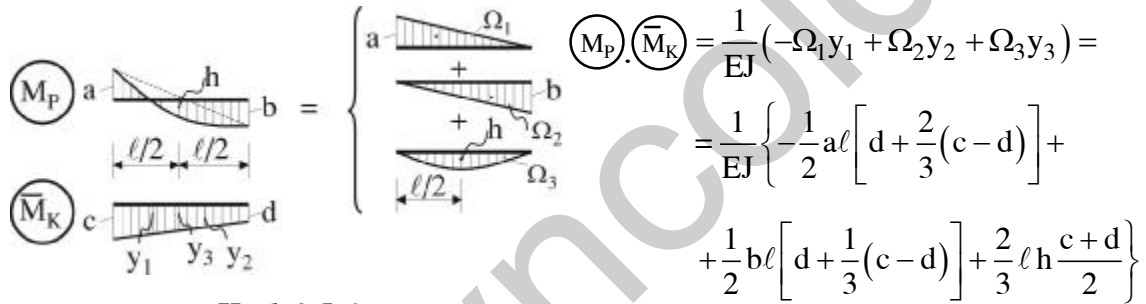
trong đó:

Ω_P^i - diện tích của biểu đồ (M_P) trong đoạn thanh thứ i ;

y_K^i - tung độ của biểu đồ (\overline{M}_K) trong đoạn thứ i ứng với trọng tâm của biểu đồ (M_P)

$\Omega_P y_K > 0$ khi hai biểu đồ căng cùng phía (< 0 khi căng ngược phía). Khi biểu đồ (M_P) có dạng phức tạp khó tính diện tích và tìm trọng tâm cần phân thành những hình đơn giản đã biết công thức tính diện tích và trọng tâm như tam giác, chữ nhật, parabol...

Ví dụ nhân hai biểu đồ trong một đoạn thanh có chiều dài l , độ cứng EJ như hình 2.5.6.


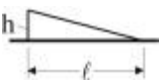


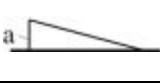
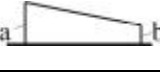

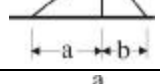
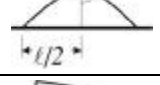
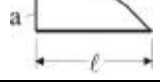
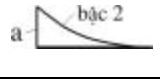
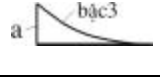


Hình 2.5.6

Bảng 2.5.1: Diện tích và trọng tâm của một số hình đơn giản hay gặp

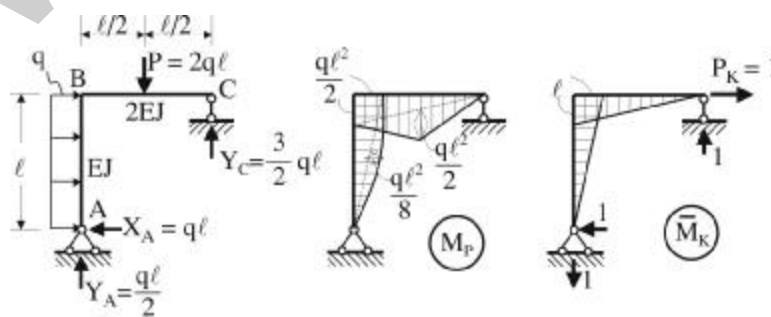
Biểu đồ	Diện tích	Vị trí trọng tâm x_0	Biểu đồ	Diện tích	Vị trí trọng tâm x_0
	$\frac{1}{2} l h$	$\frac{1}{3} l$		$\frac{2}{3} l h$	$\frac{3}{8} l$
	$\frac{2}{3} a l h$	$\frac{1}{2} l$		$\frac{1}{2} l h$	$\frac{1}{3} (l + c)$
	$\frac{1}{3} l h$	$\frac{1}{4} l$		$\frac{(a+b) l}{2}$	$\frac{(a+2b) l}{3(a+b)}$
	$\frac{1}{4} l h$	$\frac{1}{5} l$			

Bảng 2.5.2: Kết quả nhân hai biểu đồ tương ứng

M_p \ \bar{M}_K			
	alh	$al \frac{h}{2}$	$\frac{1}{2} al(h_1 + h_2)$
	$\frac{1}{2} alh$	$\frac{alh}{3}$	$\frac{al}{6}(h_1 + 2h_2)$
	$\frac{1}{2} lh(a + b)$	$\frac{lh}{6}(2a + b)$	$\frac{l}{6} [(2h_1 + h_2)a + (h_1 + 2h_2)b]$
	$\frac{1}{2} lh(b - a)$	$\frac{1}{6} lh(b - 2a)$	$\frac{l}{6} [(2h_1 + h_2)a - (h_1 + 2h_2)b]$
	$\frac{1}{2} lch$	$\frac{1}{6} lch \left(1 + \frac{b}{l}\right)$	$\frac{1}{6} cl \left[\left(1 + \frac{b}{l}\right) h_1 + \left(1 + \frac{a}{l}\right) h_2 \right]$
	$\frac{2}{3} lah$	$\frac{1}{3} lah$	$\frac{1}{3} al(h_1 + h_2)$
	$\frac{2}{3} lah$	$\frac{5}{12} lah$	$\frac{1}{12} al(5h_1 + 3h_2)$
	$\frac{1}{3} lah$	$\frac{1}{4} lah$	$\frac{1}{3} al \left[h_1 + \frac{1}{4}(h_2 - h_1) \right]$
	$\frac{1}{4} lah$	$\frac{1}{5} lah$	$\frac{1}{4} al \left[h_1 + \frac{1}{5}(h_2 - h_1) \right]$

Ví dụ:

Xác định chuyển vị ngang tại C của khung có kích thước và chịu lực như hình 2.5.7.



Hình 2.5.7

Các bước:

- Vẽ biểu đồ mô men uốn do tải trọng đã cho.
- Lập trạng thái phụ "k": Tại C đặt lực $P_K = 1$ theo phương chuyển vị cần tìm (nếu cần tìm chuyển vị góc tại C ta đặt $M_K = 1$).
- Nhân hai biểu đồ lần lượt cho từng đoạn thanh theo 2.5.2

$$\Delta_{KP} = \Delta_X^C = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \frac{ql^2}{2} \ell \frac{2}{3} \ell + \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \ell \frac{\ell}{2} \right] + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{1}{2} \frac{ql^2}{2} \ell \frac{2}{3} \ell + \frac{1}{2} \frac{ql^2}{2} \ell \frac{\ell}{2} \right] = \frac{17ql^4}{48EJ} \quad (\rightarrow)$$

2. Dàn chịu tác dụng của tải trọng

$$\Delta_{KP} = \sum_{i=1}^m \frac{N_p^i \bar{N}_k^i \ell_i}{EF_i} \quad (2.5.3)$$

trong đó:

- N_p^i, \bar{N}_k^i - giá trị lực dọc trong thanh dàn thứ i lần lượt do tải trọng đã cho, do lực $P_K = 1$ (hoặc $M_K = 1$) gây ra;
 ℓ_i, F_i - chiều dài, diện tích mặt cắt ngang của thanh dàn thứ i ;
 m - số thanh dàn.

3. Vòm chịu tác dụng của tải trọng

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_k}{EJ} ds + \sum \int \frac{\mu Q_p \bar{Q}_k}{GF} ds + \sum \int \frac{N_p \bar{N}_k}{EF} ds \quad (2.5.4)$$

trong đó:

- $(M, Q, N)_{p, k}$ - lần lượt là biểu thức nội lực của từng đoạn thanh do tải trọng đã cho, do lực đơn vị ở trạng thái phụ gây ra;
 μ - hệ số phụ thuộc vào hình dạng mặt cắt ngang;
 EJ, GF, EF - độ cứng khi uốn, trượt và kéo (nén).

4. Hệ tĩnh định chuyển vị do dịch chuyển của các liên kết tựa

$$\Delta_{K\Delta} = - \sum_{i=1}^n \bar{R}_K^i \Delta_m^i \quad (2.5.5)$$

trong đó:

- Δ_m^i - chuyển vị của liên kết tựa thứ i ;
 \bar{R}_K^i - phản lực tại liên kết có chuyển vị do lực đơn vị trong trạng thái phụ gây ra.
 $\bar{R}_K^i \Delta_{mi} > 0$ khi lực và chuyển vị cùng chiều.

2.5.2. Tính kết cấu tĩnh định chịu tải trọng di động

Khi trên công trình có tải trọng di động tác dụng, để xác định giá trị của phản lực, nội lực, chuyển vị ứng với vị trí bất lợi có thể áp dụng một trong hai cách:

Cách 1:

Cho hệ lực di động (giả thiết tải trọng là tĩnh và trong quá trình di động khoảng cách giữa các lực không đổi) dừng ở một số vị trí trên công trình. Ứng với mỗi vị trí xác định được giá trị của đại lượng cần nghiên cứu (phản lực, nội lực hoặc chuyển vị). Sau đó vẽ đường quan hệ giữa đại lượng nghiên cứu và vị trí của hệ lực di động. Từ đó tìm được vị trí bất lợi nhất và giá trị của đại lượng nghiên cứu ứng với vị trí đó.

Cách 2:

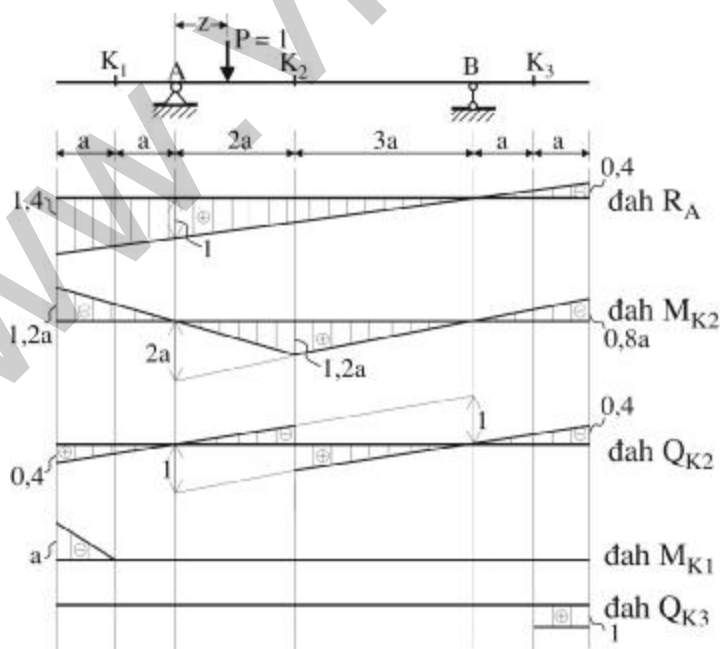
Dùng phương pháp đường ảnh hưởng.

2.5.2.1. Đường ảnh hưởng (đah)

1. Định nghĩa

Đường ảnh hưởng của một đại lượng S_K (có thể là phản lực, nội lực, hoặc chuyển vị v.v...) tại một vị trí xác định trên kết cấu là đồ thị biểu diễn biến thiên của đại lượng đó gây ra bởi một lực tập trung bằng đơn vị có phương chiều không đổi di động trên kết cấu. Dưới đây ký hiệu đah S_K là đường ảnh hưởng của đại lượng S_K .

2. Nguyên tắc vẽ đường ảnh hưởng S_K



Hình 2.5.8: Đường ảnh hưởng cho một số đại lượng của dầm nút thừa

Trên kết cấu đặt lực $P = 1$ cách điểm chọn làm gốc một đoạn z . Viết biểu thức tính S_K là một hàm của z . Vẽ đồ thị biểu diễn biến thiên của S_K theo z . Đó chính là đồ thị S_K .

Với dầm đơn (dầm công xôn, dầm hai đầu khớp, dầm mút thừa) đồ thị của phản lực, nội lực có thể vẽ nhanh bằng nhận xét. Từ đó cũng có thể vẽ nhanh đồ thị của các đại lượng này cho dầm ghép và dầm có mắt truyền lực.

Ví dụ:

Vẽ đồ thị phản lực tại A, đồ thị mô men tại mặt cắt K_1, K_2 và đồ thị lực cắt tại K_2, K_3 như hình 2.5.8.

2.5.2.2. Xác định giá trị của đại lượng nghiên cứu bằng đường ảnh hưởng

$$S_K = \sum_{i=1}^n P_i y_i + \sum_{j=1}^m q_j \omega_j \quad (2.5.6)$$

trong đó:

P_i, q_j - lực tập trung thứ i , lực phân bố đều thứ j ($P, q > 0$ khi có chiều đi xuống);

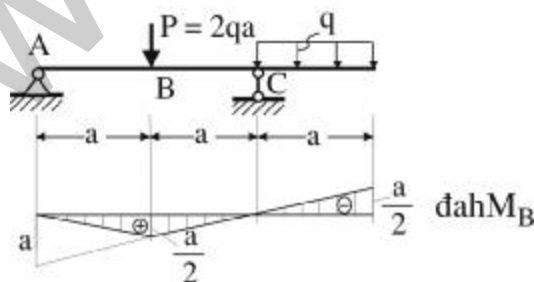
y_i, ω_j - tung độ đường ảnh hưởng dưới lực P_i , là diện tích phần đường ảnh hưởng dưới lực phân bố q_j (y, ω lấy theo dấu của đường ảnh hưởng);

n - số lực tập trung;

m - số đoạn lực phân bố đều nằm trên kết cấu.

Ví dụ:

Dùng đường ảnh hưởng xác định giá trị mô men tại mặt cắt B do tải trọng di động dừng ở vị trí như hình 2.5.9.



Hình 2.5.9

Vẽ đường ảnh hưởng M_B và dùng công thức 2.5.6 ta có:

$$M_B = py + q\omega = (+2qa) \left(+\frac{a}{2} \right) + (+q) \left(-\frac{1}{2} a \frac{a}{2} \right) = +\frac{3}{4} qa^2$$

2.5.2.3. Tìm vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng tập trung di động đối với đại lượng S_K

Tìm vị trí bất lợi nhất (VTBLN) của đoàn tải trọng đối với đại lượng S_K thực chất là bài toán khảo sát cực trị của hàm $S_K = f(z)$. Cần nắm cách tính đạo hàm và những biểu hiện cực đại, cực tiểu như sau.

+ Tính đạo hàm:

$$\frac{dS_K}{dz} = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg}\alpha_i \quad (2.5.7)$$

trong đó:

R_i - hợp các lực tập trung trong đoạn thứ i ;

$\operatorname{tg}\alpha_i$ - hệ số góc đoạn thứ i của đường ảnh hưởng. Nếu hàm đồng biến $\operatorname{tg}\alpha_i > 0$.

+ Biểu hiện cực đại:

$$\begin{aligned} \frac{dS_K}{dz} \begin{matrix} > 0 \\ = \end{matrix} &\rightarrow \frac{dS_K}{dz} \begin{matrix} \leq 0 \\ < \end{matrix} \\ (z = z_0 - dz) & \quad (z = z_0 + dz) \end{aligned} \quad (2.5.8 a)$$

+ Biểu hiện cực tiểu:

$$\begin{aligned} \frac{dS_K}{dz} \begin{matrix} \leq 0 \\ < \end{matrix} &\rightarrow \frac{dS_K}{dz} \begin{matrix} > 0 \\ = \end{matrix} \\ (z = z_0 - dz) & \quad (z = z_0 + dz) \end{aligned} \quad (2.5.8b)$$

+ Nhận xét: Vị trí bất lợi của đoàn tải trọng tập trung di động trên đường ảnh hưởng đa giác một dấu chỉ có thể xảy ra khi một trong số các lực tập trung di động nằm trên đỉnh lồi của đường ảnh hưởng.

Để tìm VTBLN làm như sau: Lần lượt đặt các lực tập trung trên từng đỉnh lồi của đường ảnh hưởng và tính đạo hàm của S_K theo (2.5.7) cho hai trường hợp lực chưa qua và qua đỉnh. Nếu hai lần tính thoả mãn điều kiện (2.5.8) thì đấy là vị trí bất lợi. Áp dụng công thức (2.5.6) sẽ xác định được giá trị của đại lượng S_K . So sánh S_K của các VTBL sẽ tìm được VTBLN.

Trường hợp trên kết cấu có cả tải trọng bất động (cố định) và tải trọng di động (tạm thời) thì phải vẽ biểu đồ bao, trên đó tại mỗi mặt cắt cho hai tung độ ứng với giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Chẳng hạn, tại mặt cắt K của biểu đồ bao mô men có hai tung độ:

Mô men dương lớn nhất:

$$M_{K_{\max}} = M_K^{cd} + M_{K_{\max}}^{dd}$$

Mô men âm nhỏ nhất:

$$M_{K_{\min}} = M_K^{cd} + M_{K_{\min}}^{dd}$$

2.5.3. Hệ thanh siêu tĩnh

2.5.3.1. Khái niệm chung

Khác với hệ tĩnh định, hệ siêu tĩnh là hệ mà dùng các phương trình cân bằng không thể xác định được nội lực của toàn hệ.

Bậc siêu tĩnh là đặc trưng của hệ siêu tĩnh. Đó là số liên kết thừa ngoài số liên kết tối thiểu cần thiết để hệ đủ bất biến hình. Bậc siêu tĩnh có thể xác định bằng một trong ba cách:

- Theo định nghĩa:

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D \quad (2.5.9)$$

- Theo công thức:

$$n = 3V - K \quad (2.5.10)$$

- Theo cách loại dần liên kết: Từ hệ đã cho loại dần liên kết để được hệ tĩnh định. Số liên kết loại bỏ quy đổi ra liên kết thanh là bậc siêu tĩnh.

Trong (2.5.9) và (2.5.10):

D - số miếng cứng nối với đất;

T, K, H - số liên kết thanh, số khớp đơn, số hàn đơn nối giữa D miếng cứng;

C - số liên kết nối của D miếng cứng với đất đã qui đổi ra liên kết thanh;

V - số chu vi kín có trong hệ;

K - số khớp đơn giản.

Liên kết khớp và hàn đơn giản là liên kết nối chỉ hai miếng cứng. Liên kết phức tạp là liên kết nối nhiều hơn hai miếng cứng. Khi tính bậc siêu tĩnh phải tính đổi liên kết phức tạp ra liên kết đơn giản bằng cách lấy số miếng cứng quy tụ tại liên kết đó trừ đi một.

Để tính hệ siêu tĩnh có thể dùng phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp phân phối mô men, phương pháp phần tử hữu hạn v.v... Dưới đây trình bày nội dung chính của phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Phương pháp phần tử hữu hạn được trình bày trong mục 2.11.

Với hệ siêu tĩnh khi tính toán thường thực hiện theo các bước sau:

1. Xác định số ẩn n.
2. Lập hệ cơ bản dùng để tính hệ siêu tĩnh, chọn ẩn số.
3. Thiết lập hệ phương trình chính tắc: Xác định các hệ số ẩn từ các biểu đồ ứng với ẩn lực có giá trị bằng đơn vị và số hạng tự do từ biểu đồ ứng với nguyên nhân tác dụng trên hệ cơ bản.
4. Giải hệ phương trình chính tắc tìm giá trị các ẩn và từ đó xác định nội lực trên hệ cơ bản đã chọn.
5. Vẽ biểu đồ mô men uốn. Trong khi vẽ có thể sử dụng phương pháp cộng tác dụng.

6. Vẽ biểu đồ lực cắt và lực dọc. Thông thường để vẽ biểu đồ Q trong mỗi đoạn thanh thường tính giá trị Q tại đầu mút thanh từ M theo công thức:

$$Q_{AB} = Q_{AB}^0 \pm \frac{|\Delta M|}{l_{AB}} \quad (2.5.11)$$

trong đó:

Q_{AB} - lực cắt cần tìm tại A của đoạn thanh AB trong hệ siêu tĩnh;

Q_{AB}^0 - lực cắt tại A của thanh AB được coi như dầm đơn hai đầu khớp do tải trọng tác dụng trong đoạn thanh AB gây ra;

ΔM - chênh lệch mô men tại hai đầu thanh;

l_{AB} - chiều dài đoạn thanh AB. Trong công thức (2.5.11) lấy dấu "+" nếu trục thanh quay đến đường biểu diễn mô men trong đoạn theo góc nhỏ nhất theo chiều thuận chiều kim đồng hồ. Ngược lại lấy dấu "-".

Biểu đồ lực dọc thường vẽ sau khi vẽ biểu đồ Q trên cơ sở tính cân bằng lực tại các nút.

7. Tính chuyển vị:

- Dầm, khung do tải trọng tác dụng :

$$\Delta_{KP} = \left(M_P \right) \left(\bar{M}_K^0 \right) \quad (2.5.12)$$

- Dàn do tải trọng tác dụng:

$$\Delta_{KP} = \sum_i \frac{N_P^i \bar{N}_K^0 \ell_i}{EF_i} \quad (2.5.13)$$

- Vòm do tải trọng tác dụng:

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}_K^0 ds}{EJ} + \sum \int \frac{\mu Q_P \bar{Q}_K^0 ds}{GF} + \sum \int \frac{N_P \bar{N}_K^0 ds}{EF} \quad (2.5.14)$$

- Dầm, khung do chuyển vị các liên kết tựa:

$$\Delta_{K\Delta} = \left(M_\Delta \right) \left(\bar{M}_K^0 \right) - \sum \bar{R}_K^{oi} \Delta_m^i \quad (2.5.15)$$

trong đó:

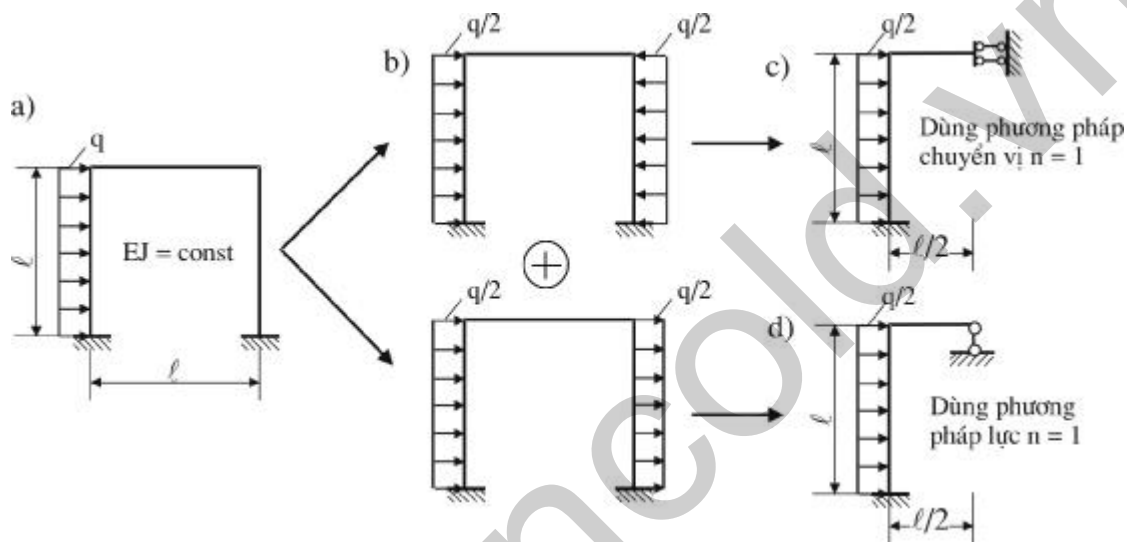
$\left(M_P \right), \left(M_\Delta \right)$ - lần lượt là biểu đồ mômen uốn do tải trọng, biểu đồ mô men uốn do chuyển vị liên kết tựa gây ra trên hệ siêu tĩnh;

$\left(\bar{M}_K^0 \right)$ - biểu đồ mômen trên hệ cơ bản do lực đơn vị ở trạng thái phụ gây ra;

Δ_m^i - chuyển vị của liên kết tựa thứ i trong cơ bản;

\bar{R}_K^{oi} - phản lực tại liên kết i có chuyển vị Δ_m^i trong trạng thái phụ "k".

Thực tế hay gặp hệ siêu tĩnh có dạng đối xứng về hình dáng, độ cứng và liên kết, chịu tác dụng của tải trọng đối xứng hoặc phản đối xứng. Lợi dụng tính đối xứng có thể đưa bài toán siêu tĩnh bậc cao về bài toán siêu tĩnh bậc thấp bằng cách chỉ xét một nửa đối xứng của hệ sau khi đã thêm liên kết để bảo đảm tương đương về chuyển vị. Còn tải trọng bất kỳ luôn có thể thay thế bằng tổ hợp của tải trọng đối xứng và phản đối xứng. Chẳng hạn với kết cấu vẽ ở hình 2.5.10 a có thể thay thế bằng một nửa đối xứng vẽ ở hình 2.5.10 c và 2.5.10 d.



Hình 2.5.10: Sơ đồ tính khung đối xứng và phản đối xứng

2.5.3.2. Phương pháp lực

1. Nội dung

+ Chọn hệ cơ bản:

Đưa kết cấu siêu tĩnh về kết cấu tĩnh định bằng cách loại bỏ các liên kết dư thừa ngoài các liên kết cần thiết để hệ bất biến hình. Thay tác dụng của các liên kết bỏ đi bằng phản lực liên kết. Chúng là ẩn của bài toán, ký hiệu là X_1, X_2, \dots, X_n .

+ Thiết lập hệ phương trình xác định ẩn:

Để hệ cơ bản và hệ đã cho tương đương về mặt chuyển vị thì tại vị trí của các liên kết bị loại bỏ chuyển vị do tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị của liên kết tựa và do các ẩn lực X_1, X_2, \dots, X_n gây ra phải bằng 0. Trường hợp kết cấu chỉ chịu tác dụng của tải trọng điều kiện này được viết ở dạng:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2P} = 0$$

...

$$\delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nP} = 0$$

trong đó

δ_{KM} - chuyển vị do ảnh lực có giá trị bằng đơn vị gây ra ở hệ cơ bản;

Δ_{KP} - chuyển vị do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản.

Các giá trị này được tính bằng các công thức (2.5.2), (2.5.3), (2.5.4). Hệ phương trình trên được gọi là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực.

+ Giải hệ phương trình chính tắc tìm X_1 .

+ Vẽ biểu đồ mô men uốn:

Cộng biểu đồ mô men trên hệ cơ bản do ảnh lực gây ra với biểu đồ mô men trên hệ cơ bản do tải trọng gây ra được biểu đồ mô men tổng cộng. Cụ thể là:

$$M_P = \sum_{k=1}^n \overline{M}_K X_K + M_P^0 \quad (2.5.16)$$

trong đó:

\overline{M}_K - biểu đồ mô men trên hệ cơ bản do lực $X_K = 1$;

M_P^0 - biểu đồ mô men do tải trọng gây ra.

Ghi chú: Trường hợp kết cấu chịu lún không đều, thay thế cho Δ_{KP} dùng $\Delta_{K\Delta}$ xác định bằng công thức (2.5.5) và biểu thức cộng tác dụng của mô men là:

$$M_{\Delta} = \sum_{k=1}^n \overline{M}_K X_K .$$

Ví dụ:

Vẽ biểu đồ nội lực cho khung chịu tải trọng như hình 2.5.11

+ Xác định số bậc siêu tĩnh: Hệ có 1 bậc siêu tĩnh.

+ Hệ cơ bản: Bỏ liên kết chống ngang ở gối C, thay bằng phản lực liên kết X_1 .

+ Trong hệ cơ bản vẽ biểu đồ mô men \overline{M}_1 do $X_1 = 1$ gây ra và biểu đồ mô men M_P^0 do P gây ra.

+ Thiết lập phương trình chính tắc :

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

trong đó:

$$\delta_{11} = \left(\overline{M}_1 \right) \left(\overline{M}_1 \right) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{2}{3} \times 4 \right) 2 = \frac{128}{3EJ}$$

$$\Delta_{1P} = \left(\overline{M}_1 \right) \left(M_P^0 \right) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \times 80 \times 4 \times \frac{2}{3} \times 4 + \frac{2}{3} \times 4 \times 20 \times \frac{4}{2} + \frac{1}{2} \times 80 \times 4 \times \frac{2}{3} \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times 40 \times \frac{4}{2} \right) = \frac{1120}{EJ}$$

+ Giải hệ phương trình chính tắc tìm được:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -26,25 \text{ kN}$$

+ Vẽ biểu đồ mômen: Sử dụng cách cộng biểu đồ

$$M_P = \bar{M}_1 X_1 + M_P^0$$

+ Vẽ biểu đồ Q: Tính Q_P theo công thức (2.5.11)

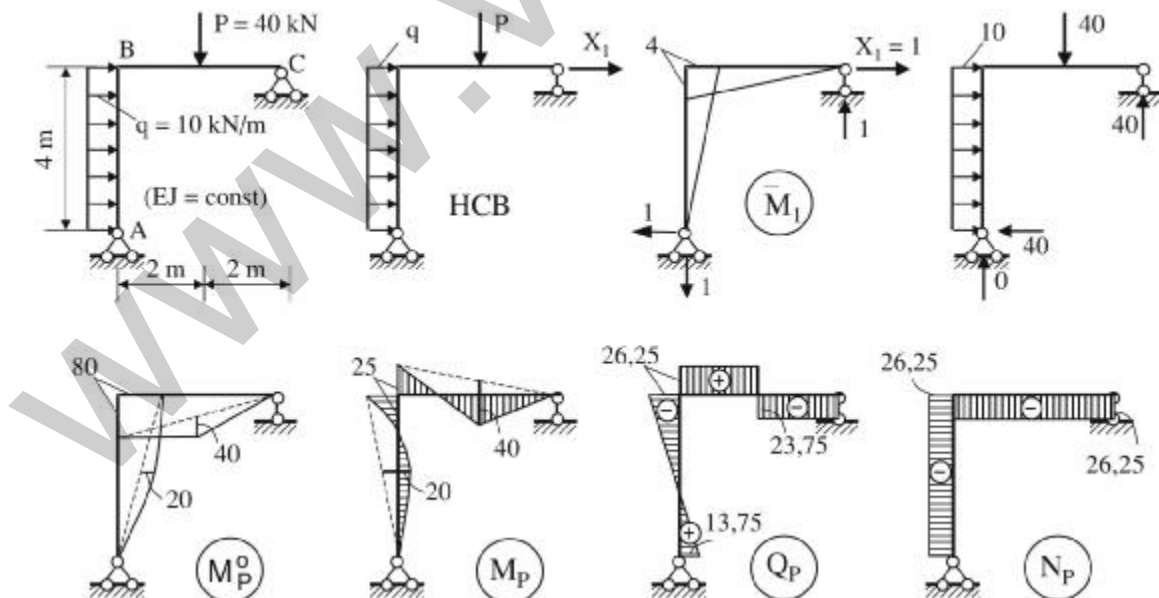
$$Q_{AB} = Q_{AB}^0 - \frac{|\Delta M|}{l_{AB}} = +20 - \frac{25}{4} = +13,75 \text{ kN}$$

$$Q_{BA} = Q_{BA}^0 - \frac{|\Delta M|}{l_{AB}} = -20 - \frac{25}{4} = -26,25 \text{ kN}$$

$$Q_{BC} = Q_{BC}^0 + \frac{|\Delta M|}{l_{AB}} = +20 + \frac{25}{4} = +26,25 \text{ kN}$$

$$Q_{CB} = Q_{CB}^0 + \frac{|\Delta M|}{l_{AB}} = -20 + \frac{25}{4} = -13,75 \text{ kN}$$

+ Vẽ biểu đồ N bằng cách xét cân bằng hình chiếu nút tại các nút.



Hình 2.5.11: Hệ cơ bản và kết quả tính khung bằng phương pháp lực

2. Tính dầm liên tục

Dầm liên tục là kết cấu hay gặp trong thực tế như: Dầm cầu giao thông, dầm cầu trục trong nhà máy, dầm đỡ máng phun... Với loại kết cấu siêu tĩnh này, để đơn giản cho việc tính theo phương pháp lực thường chọn hệ cơ bản bằng cách đưa khớp vào gối và do đó ảnh lực là mô men tại gối (hình 2.5.12). Trường hợp dầm có độ cứng như nhau trong các đoạn, để bảo đảm điều kiện tương đương về chuyển vị giữa hệ cơ bản và hệ ban đầu phải cho góc xoay tương đối tại vị trí các khớp bằng 0. Từ đó viết được phương trình cho gối thứ i :

$$\begin{aligned} & l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} + \\ & + 6\left(\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

trong đó:

M_{i-1}, M_i, M_{i+1} - mômen uốn của dầm trên các gối tựa $i-1, i$ và $i+1$. Mô men làm căng thớ dưới lấy dấu dương, ngược lại lấy dấu âm.

l_i, l_{i+1} - chiều dài của nhịp thứ i và $i+1$.

ω_i - diện tích của biểu đồ M_p^0 trong nhịp thứ i .

a_i, b_i - khoảng cách từ trọng tâm biểu đồ M_p^0 trong nhịp thứ i đến gối trái và đến gối phải.

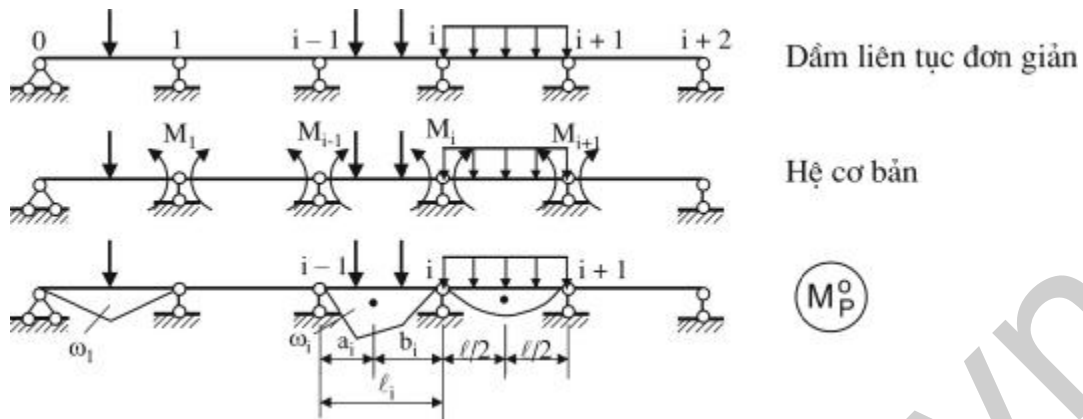
Vì trong mỗi phương trình viết cho một gối chỉ chứa 3 mô men ẩn nên phương trình trên được gọi là phương trình 3 mô men.

Chú ý là tên của các nhịp và tên của các đại lượng khác (l, a, b, \dots) trong phương trình (2.5.17) được lấy là tên của gối ở bên phải nhịp đó. Mặt khác, phương trình (2.5.17) chỉ áp dụng được cho dầm siêu tĩnh tựa trên các gối. Với dầm có liên kết ở đầu là ngàm phải đưa về dầm siêu tĩnh đặt trên gối tương đương với nhịp của đoạn thay thế rất nhỏ (hình 2.5.13).

Các bước tính dầm liên tục có thể hệ thống lại như sau:

- Lần lượt viết phương trình 3 mômen (2.5.17) cho các gối tựa trung gian được hệ phương trình đại tuyến chứa ẩn là mô men tại các gối đó.
- Giải hệ phương trình đại tuyến tìm được các mômen ẩn.
- Vẽ biểu đồ M, Q .

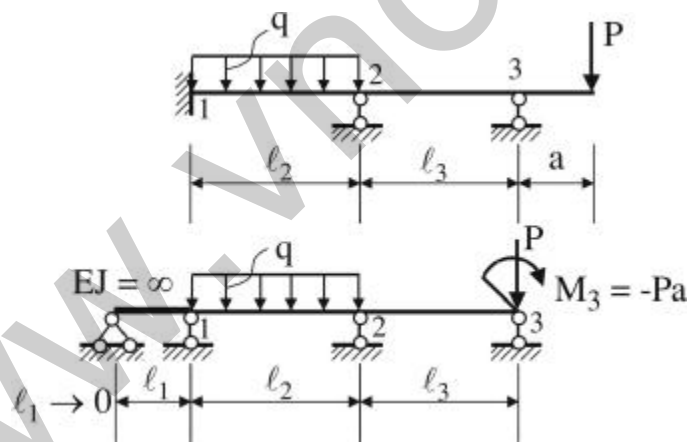
Với dầm liên tục đặt trên các gối tựa đàn hồi (dầm trên các cột cao, dầm cầu phao...) có thể áp dụng phương trình 5 mômen (tham khảo giáo trình Cơ học kết cấu của các trường đại học kỹ thuật).



Hình 2.5.12: Hệ cơ bản và biểu đồ mô men M_P^0 của dầm liên tục

Bảng 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5 là các bảng tra sẵn các giá trị mômen uốn, lực cắt, phản lực trong dầm một nhịp, dầm liên tục có chiều dài các nhịp như nhau chịu tác dụng của tải trọng và độ lún gối tựa.

Bảng 2.5.6 cho các tung độ đường ảnh hưởng và bảng 2.5.7 cho các tung độ biểu đồ bao của mômen uốn và lực cắt trong dầm liên tục.



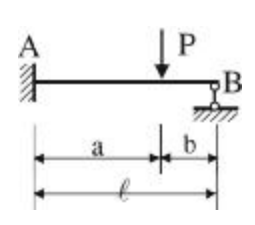
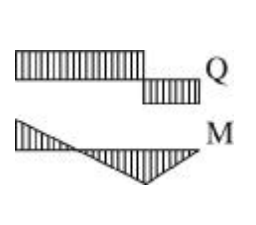
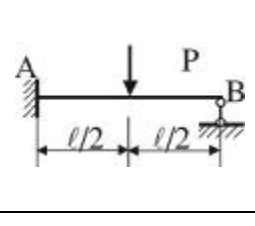
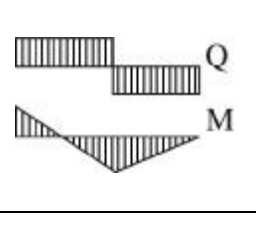
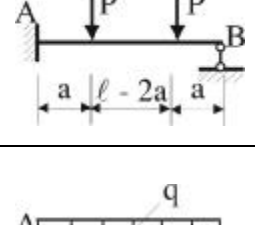
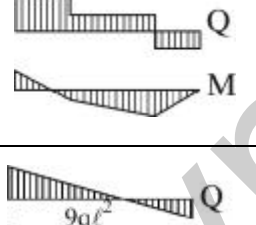
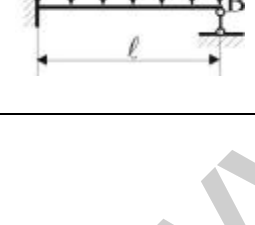
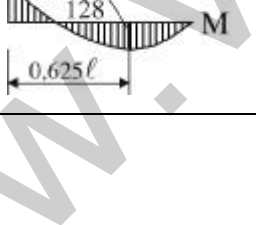
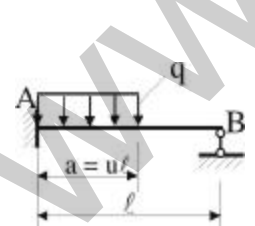
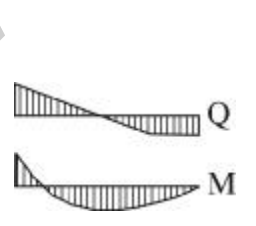
Hình 2.5.13: Thay ngắn bằng đoạn dầm có độ cứng bằng vô cùng hoặc chiều dài bằng không

3. Tính khung và vòm siêu tĩnh

Với kết cấu khung, vòm siêu tĩnh cần lợi dụng tính đối xứng của sơ đồ kết cấu, tính đối xứng và phản xứng của nguyên nhân tác dụng hoặc sử dụng một số thủ thuật khác (tâm đàn hồi ...) để giảm bớt số ẩn của bài toán.

Bảng 2.5.8 cho kết quả tính nội lực của một số dạng khung, vòm siêu tĩnh và ống tròn.

Bảng 2.5.3: Các phản lực trong dầm siêu tĩnh một nhịp

Sơ đồ tải trọng	Biểu đồ Q và M	Trị số phản lực	Trị số phản lực mômen																								
1	2	3	4																								
1. Dầm một đầu ngàm và một đầu tựa khớp																											
		$A = \frac{Pb}{2l} \left(3 - \frac{b^2}{l^2} \right)$ $B = \frac{Pa^2}{2l^2} \left(3 - \frac{a}{l} \right)$	$M_A = -\frac{Pab}{2l^2} (\ell + b)$																								
		$A = \frac{11}{16} P$ $B = \frac{5}{16} P$	$M_A = -\frac{3}{16} P\ell$																								
		$A = P \left[1 + \frac{3a}{2l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \right]$ $B = 2P - A$	$M_A = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{a}{l} \right) Pa$																								
		$A = \frac{5}{8} q\ell$ $B = \frac{3}{8} q\ell$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{8}$																								
		$A = qa - B$ $B = \frac{qa}{2} u - q\ell k_1$ $M = -\frac{q\ell^2}{8} u^2 (2 - u^2) = -q\ell^2 k_1$	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>u</th> <th>k₁</th> <th>u</th> <th>k₁</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,1</td> <td>0,0045</td> <td>0,6</td> <td>0,082</td> </tr> <tr> <td>0,2</td> <td>0,0162</td> <td>0,7</td> <td>0,1035</td> </tr> <tr> <td>0,3</td> <td>0,0325</td> <td>0,8</td> <td>0,1152</td> </tr> <tr> <td>0,4</td> <td>0,0512</td> <td>0,9</td> <td>0,1225</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,0703</td> <td>1,0</td> <td>0,1250</td> </tr> </tbody> </table>	u	k ₁	u	k ₁	0,1	0,0045	0,6	0,082	0,2	0,0162	0,7	0,1035	0,3	0,0325	0,8	0,1152	0,4	0,0512	0,9	0,1225	0,5	0,0703	1,0	0,1250
u	k ₁	u	k ₁																								
0,1	0,0045	0,6	0,082																								
0,2	0,0162	0,7	0,1035																								
0,3	0,0325	0,8	0,1152																								
0,4	0,0512	0,9	0,1225																								
0,5	0,0703	1,0	0,1250																								

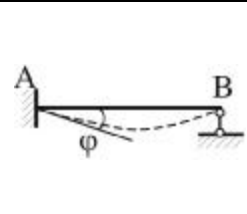
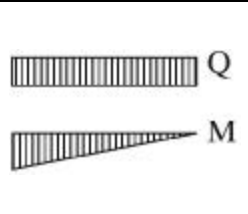
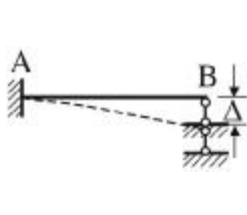
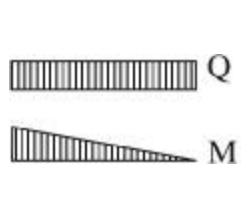
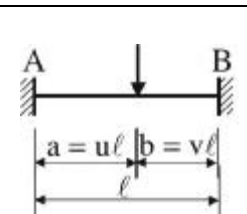
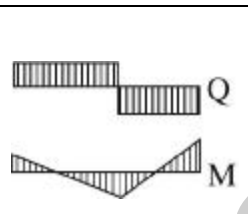
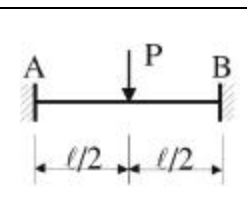
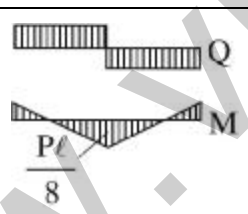
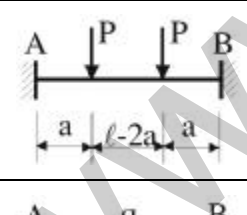
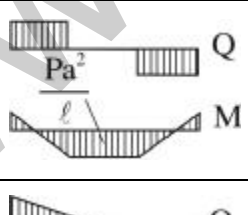
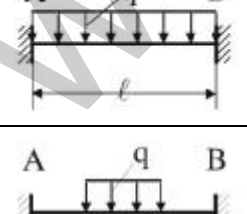
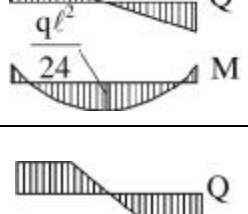
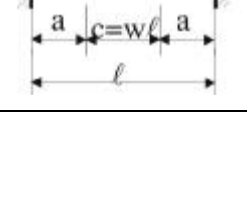
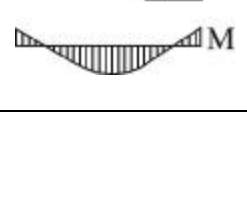
Bảng 2.5.3 (tiếp)

1	2	3	4																								
		$A = \frac{qb}{2}v + qlk_2$ $B = qb - A$ $M = -\frac{q\ell^2}{8}v^2(2 - v^2) = -q\ell^2k_2$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>v</th> <th>k₂</th> <th>v</th> <th>k₂</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,1</td> <td>0,0025</td> <td>0,6</td> <td>0,0738</td> </tr> <tr> <td>0,2</td> <td>0,0098</td> <td>0,7</td> <td>0,0925</td> </tr> <tr> <td>0,3</td> <td>0,0215</td> <td>0,8</td> <td>0,1088</td> </tr> <tr> <td>0,4</td> <td>0,0368</td> <td>0,9</td> <td>0,1205</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,0547</td> <td>1,0</td> <td>0,1250</td> </tr> </tbody> </table>	v	k ₂	v	k ₂	0,1	0,0025	0,6	0,0738	0,2	0,0098	0,7	0,0925	0,3	0,0215	0,8	0,1088	0,4	0,0368	0,9	0,1205	0,5	0,0547	1,0	0,1250	
v	k ₂	v	k ₂																								
0,1	0,0025	0,6	0,0738																								
0,2	0,0098	0,7	0,0925																								
0,3	0,0215	0,8	0,1088																								
0,4	0,0368	0,9	0,1205																								
0,5	0,0547	1,0	0,1250																								
		$A = \frac{qc}{2} + \frac{qc}{16}(3 - w^2)$ $B = qc - A$	$M_A = -\frac{q\ell c}{16} \times (3 - w^2)$																								
		$A = \frac{21}{64}q\ell$ $B = \frac{11}{64}q\ell$	$M_A = -\frac{5}{64}q\ell^2$																								
		$A = \frac{q\ell}{8} \times (5 - 4u - 2u^2 + u^3)$ $B = q(\ell - a) - A$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{8} \times (1 - 2u^2 + u^3)$																								
		$A = \frac{2}{5}q\ell$ $B = \frac{1}{10}q\ell$	$M_A = -\frac{1}{15}q\ell^2$																								
		$A = \frac{9}{40}q\ell$ $B = \frac{11}{40}q\ell$	$M_A = -\frac{7}{120}q\ell^2$																								

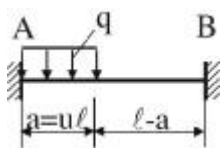
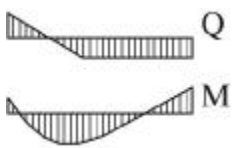
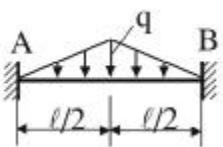
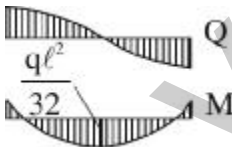
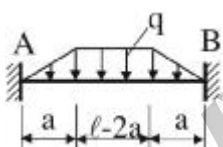

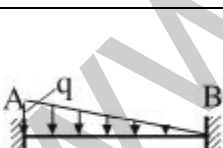
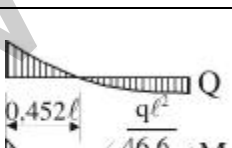
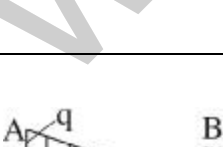

Bảng 2.5.3 (tiếp)

1	2	3	4
		$A = \frac{q\ell}{10} v^2 (5 - v^2)$ $B = 0,5qb - A$	$M_A = -\frac{qb^2}{30} (5 - 3v^2)$
		$A = \frac{q\ell}{40} u \times$ $\times (20 - 5u^2 + u^3)$ $B = 0,5qa - A$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{120} u^2 \times$ $\times (3u^2 - 15u + 20)$
		$A = \frac{q\ell}{40} u \times$ $\times (20 - 5u^2 + 4u^3)$ $B = 0,5qa - A$	$M_A = -\frac{qa^2}{120} \times$ $\times (12u^2 - 45u + 40)$
		$A = \frac{q\ell}{40} v^2 (10 - v^2)$ $B = 0,5qb - A$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{120} v^2 \times$ $\times (10 - 3v^2)$
		$A = \frac{3}{2} \frac{M_0}{\ell}$ $B = -\frac{3}{2} \frac{M_0}{\ell}$	$M_A = -\frac{M_0}{2}$
		$A = -\frac{3M_0(\ell^2 - b^2)}{2\ell^3}$ $B = -A$	$M_A = \frac{M_0}{2} \left(1 - 3\frac{b^2}{\ell^2} \right)$ <p>Khi $b = 0,577\ell$ có</p> $M_A = 0$

Bảng 2.5.3 (tiếp)

1	2	3	4
		$A = -\frac{3EJ}{l^2} \varphi$ $B = +\frac{3EJ}{l^2} \varphi$	$M_A = +\frac{3EJ}{l} \varphi$
		$A = \frac{3EJ}{l^3} \Delta$ $B = -\frac{3EJ}{l^3} \Delta$	$M_A = -\frac{3EJ}{l^2} \Delta$
2. Dầm hai đầu liên kết ngàm			
		$A = P \frac{(3a+b)b^2}{l^3}$ $B = P \frac{(a+3b)a^2}{l^3}$	$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_B = -\frac{Pa^2b}{l^2}$
		$A = B = \frac{P}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{P\ell}{8}$
		$A = B = P$	$M_A = M_B = -Pa \left(1 - \frac{a}{l}\right)$
		$A = B = \frac{q\ell}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{q\ell^2}{12}$
		$A = B = \frac{qc}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{qc\ell}{24} (3 - w^2)$

Bảng 2.5.3 (tiếp)

1	2	3	4																																				
		$A = \frac{qa(\ell - 0,5a)}{\ell} + q\ell(k_1 - k_2)$ $B = \frac{qa^2}{2\ell} - q\ell(k_1 - k_2)$ $M_A = -\frac{q\ell^2}{6}u^2(3 - 4u + 1,5u^2) = -q\ell^2k_1$ $M_B = -\frac{q\ell^2}{3}u^2(u - 0,75u^2) = -q\ell^2k_2$	<table border="1" data-bbox="742 817 1332 1131"> <thead> <tr> <th>u</th> <th>k₁</th> <th>k₂</th> <th>u</th> <th>k₁</th> <th>k₂</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,1</td> <td>0,0044</td> <td>0,0003</td> <td>0,6</td> <td>0,0684</td> <td>0,0396</td> </tr> <tr> <td>0,2</td> <td>0,0151</td> <td>0,0023</td> <td>0,7</td> <td>0,0764</td> <td>0,0543</td> </tr> <tr> <td>0,3</td> <td>0,0290</td> <td>0,0070</td> <td>0,8</td> <td>0,0811</td> <td>0,0683</td> </tr> <tr> <td>0,4</td> <td>0,0437</td> <td>0,0149</td> <td>0,9</td> <td>0,0830</td> <td>0,0790</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,0573</td> <td>0,0260</td> <td>1,0</td> <td>0,0833</td> <td>0,0833</td> </tr> </tbody> </table>	u	k ₁	k ₂	u	k ₁	k ₂	0,1	0,0044	0,0003	0,6	0,0684	0,0396	0,2	0,0151	0,0023	0,7	0,0764	0,0543	0,3	0,0290	0,0070	0,8	0,0811	0,0683	0,4	0,0437	0,0149	0,9	0,0830	0,0790	0,5	0,0573	0,0260	1,0	0,0833	0,0833
u	k ₁	k ₂	u	k ₁	k ₂																																		
0,1	0,0044	0,0003	0,6	0,0684	0,0396																																		
0,2	0,0151	0,0023	0,7	0,0764	0,0543																																		
0,3	0,0290	0,0070	0,8	0,0811	0,0683																																		
0,4	0,0437	0,0149	0,9	0,0830	0,0790																																		
0,5	0,0573	0,0260	1,0	0,0833	0,0833																																		
		$A = B = \frac{q\ell}{4}$	$M_A = M_B = -\frac{5q\ell^2}{96}$																																				
		$A = B = \frac{q(\ell - a)}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{q\ell^2}{12} \times (1 - 2u^2 + u^3)$																																				
		$A = \frac{7}{20}q\ell$ $B = \frac{3}{20}q\ell$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{20}$ $M_B = -\frac{q\ell^2}{30}$																																				
		$A = \frac{qa}{20} \times (10 - 5u^2 + 2u^3)$ $B = 0,5qa - A$	$M_A = -\frac{qa^2}{6} \left(1 - u + \frac{3u^2}{10}\right)$ $M_B = -\frac{qa^2}{60} u(5 - 3u)$																																				

Bảng 2.5.3 (tiếp)

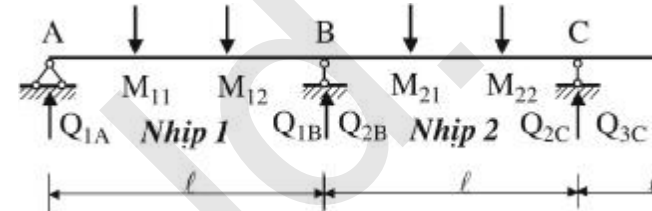
1	2	3	4
		$A = \frac{qa}{20} \times (10 - 15u^2 + 8u^3)$ $B = 0,5qa - A$	$M_A = -\frac{qa^2}{30} \times (10 - 15u + 6u^2)$ $M_B = -\frac{qa^3}{20l} (5 - 4u)$
	<p>$\ell/3 < a < 2\ell/3$</p> <p>$a = \ell/3$</p> <p>$a < \ell/3$</p>	$A = -\frac{6M_0ab}{\ell^3}$ $B = +\frac{6M_0ab}{\ell^3}$	$M_A = \frac{M_0b}{\ell^2} (2a - b)$ $M_B = \frac{M_0a}{\ell^2} (a - 2b)$ <p>Khi $a = \frac{\ell}{3}$:</p> $M_A = 0$ $M_B = -\frac{M_0}{3}$
		$A = -\frac{6EJ}{\ell^2} \phi$ $B = +\frac{6EJ}{\ell^2} \phi$	$M_A = +\frac{4EJ}{\ell} \phi$ $M_B = -\frac{2EJ}{\ell} \phi$
		$A = +\frac{12EJ}{\ell^3} \Delta$ $B = -\frac{12EJ}{\ell^3} \Delta$	$M_A = -\frac{6EJ}{\ell^2} \Delta$ $M_B = +\frac{6EJ}{\ell^2} \Delta$
3. Dầm một đầu ngàm, một đầu ngàm trượt			
		$A = P$	$M_A = -\frac{Pa}{2} \left(2 - \frac{a}{\ell} \right)$ $M_B = \frac{Pa^2}{2\ell}$
		$A = P$	$M_A = -\frac{3}{8} P\ell$ $M_B = +\frac{1}{8} P\ell$

Bảng 2.5.3 (tiếp)

1	2	3	4
		$A = P$	$M_A = -\frac{Pl}{2}$ $M_B = +\frac{Pl}{2}$
		$A = ql$	$M_A = -\frac{1}{3}ql^2$ $M_B = +\frac{1}{6}ql^2$
		$A = qa$	$M_A = -\frac{qa^2}{6}(3-u)$
		$A = qb$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{6}(3v-v^3)$
		$A = 0$	$M_A = -M_0v = -\frac{M_0b}{l}$ $M_B = M_0u = \frac{M_0a}{l}$
		$A = 0$	$M_A = M_B = \frac{EJ}{l}\varphi$

Bảng 2.5.4: Mô men uốn, lực cắt và phản lực trong dầm liên tục có độ dài nhịp như nhau chịu tác dụng của tải trọng

Hình vẽ bên biểu thị cách ký hiệu các nội lực. Chỉ số thứ nhất của mô men và lực cắt biểu thị tên nhịp. Chỉ số thứ hai của mô men, khi có lực tập trung chỉ vị trí của lực, khi có lực phân bố chỉ trị số mô men lớn nhất trong nhịp. Chỉ số thứ hai của lực cắt biểu thị tên gối tựa sát với tiết diện.



Sơ đồ nhịp chịu tải trọng	Mô men uốn, lực cắt và phản lực	Sơ đồ lực trên nhịp chịu tải				
1	2	3	4	5	6	7
Dầm hai nhịp						
	M_{11}	$0,070 q\ell^2$	$0,156 P\ell$	$0,222 P\ell$	$0,258 P\ell$	$0,048 q\ell^2$
	M_{12}	—	—	$0,111 P\ell$	$0,265 P\ell$	—
	M_{13}	—	—	—	$0,023 P\ell$	—
	M_B (min)	$-0,125 q\ell^2$	$-0,188 P\ell$	$-0,333 P\ell$	$-0,469 P\ell$	$-0,078 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$	$0,375 q\ell$	$0,313 P$	$0,667 P$	$1,031 P$	$0,172 q\ell$
	B (max)	$1,250 q\ell$	$1,375 P$	$2,667 P$	$3,938 P$	$0,656 q\ell$
	Q_{1B} (min)	$-0,625 q\ell$	$-0,688 P$	$-1,333 P$	$-1,969 P$	$-0,328 q\ell$

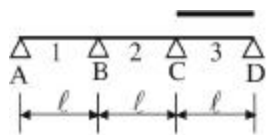

Bảng 2.5.4 (tiếp)

1	2	3	4	5	6	7
	M_{11} (max)	$0,096 q\ell^2$	$0,203 P\ell$	$0,278 P\ell$	$0,361 P\ell$	$0,065 q\ell^2$
	M_{12} (max)	–	–	$0,222 P\ell$	$0,383 P\ell$	–
	M_{13} (max)	–	–	–	$0,200 P\ell$	–
	M_B	$-0,063 q\ell^2$	$-0,094 P\ell$	$-0,167 P\ell$	$-0,234 P\ell$	$-0,039 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$ (max)	$0,438 q\ell$	$0,406 P$	$0,833 P$	$1,266 P$	$0,211 q\ell$
	M_{11} (max)	–	$-0,047 P\ell$	$-0,056 P\ell$	$-0,059 P\ell$	$-0,018 q\ell^2$
	M_{12} (max)	–	–	$-0,111 P\ell$	$-0,117 P\ell$	–
	M_{13} (max)	–	–	–	$-0,176 P\ell$	–
	$A = Q_{1A}$ (max)	$-0,063 q\ell$	$-0,094 P$	$-0,167 P$	$-0,234 P$	$-0,039 q\ell$
	Dầm ba nhịp					
	M_{11}	$0,080 q\ell^2$	$0,175 P\ell$	$0,244 P\ell$	$0,281 P\ell$	$0,054 q\ell^2$
	M_{12}	–	–	$0,156 P\ell$	$0,313 P\ell$	–
	M_{13}	–	–	–	$0,094 P\ell$	–
	M_{21}	$0,025 q\ell^2$	$0,100 P\ell$	$0,067 P\ell$	$0,000$	$0,021 q\ell^2$
	M_{22}	–	–	$0,067 P\ell$	$0,125 P\ell$	–
	M_B	$-0,100 q\ell^2$	$-0,150 P\ell$	$-0,267 P\ell$	$-0,375 P\ell$	$-0,063 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$	$0,400 q\ell$	$0,350 P$	$0,733 P$	$1,125 P$	$0,188 q\ell$
	B	$1,100 q\ell$	$1,150 P$	$2,267 P$	$3,375 P$	$0,563 q\ell$
	Q_{1B}	$-0,600 q\ell$	$-0,650 P$	$-1,267 P$	$-1,875 P$	$-0,313 q\ell$
	$Q_{2B} = -Q_{2C}$	$0,500 q\ell$	$0,500 P$	$1,000 P$	$1,500 P$	$0,250 q\ell$


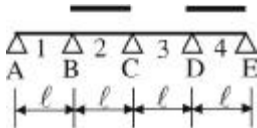
Bảng 2.5.4 (tiếp)

1	2	3	4	5	6	7
	M_{11} (max) M_{12} (max) M_{13} (min) M_{21} (min) M_{22} (min) M_B $A = Q_{1A}$ (max)	$0,101 q\ell^2$ – – $- 0,050 q\ell^2$ – $- 0,050 q\ell^2$ $0,450 q\ell$	$0,213 P\ell$ – – $- 0,075 P\ell$ – $- 0,075 P\ell$ $0,425 P$	$0,289 P\ell$ $0,244 P\ell$ – $- 0,133 P\ell$ $- 0,133 P\ell$ $- 0,133 P\ell$ $0,867 P$	$0,328 P\ell$ $0,406 P\ell$ $0,234 P\ell$ $- 0,188 P\ell$ $- 0,188 P\ell$ $- 0,188 P\ell$ $1,313 P$	$0,068 q\ell^2$ – – $- 0,032 q\ell^2$ – $- 0,032 q\ell^2$ $0,219 q\ell$
	M_{11} (min) M_{12} (min) M_{13} (min) M_{21} (max) M_{22} (max) M_B $A = Q_{1A}$ (min)	– – – $0,075 q\ell^2$ – $- 0,050 q\ell^2$ $- 0,050 q\ell$	$- 0,038 P\ell$ – – $0,175 P\ell$ – $- 0,075 P\ell$ $- 0,075 P$	$- 0,044 P\ell$ $- 0,089 P\ell$ – $0,200 P\ell$ $0,200 P\ell$ $- 0,133 P\ell$ $- 0,133 P$	$- 0,047 P\ell$ $- 0,094 P\ell$ $- 0,141 P\ell$ $0,188 P\ell$ $0,313 P\ell$ $- 0,188 P\ell$ $- 0,188 P$	$- 0,014 q\ell^2$ – – $0,052 q\ell^2$ – $- 0,032 q\ell^2$ $- 0,032 q\ell$
	M_B (min) M_C B (max) Q_{1B} (min) Q_{2B} (max)	$- 0,117 q\ell^2$ $- 0,033 q\ell^2$ $1,200 q\ell$ $- 0,617 q\ell$ $0,583 q\ell$	$- 0,175 P\ell$ $- 0,050 P\ell$ $1,300 P$ $- 0,675 P$ $0,625 P$	$- 0,311 P\ell$ $- 0,089 P\ell$ $2,533 P$ $- 1,311 P$ $1,222 P$	$- 0,438 P\ell$ $- 0,125 P\ell$ $3,750 P$ $- 1,937 P$ $1,813 P$	$- 0,073 q\ell^2$ $- 0,022 q\ell^2$ $0,626 q\ell$ $- 0,323 q\ell$ $0,303 q\ell$

Bảng 2.5.4 (tiếp)

1	2	3	4	5	6	7
	M_B (max)	$0,017 ql^2$	$0,025 Pl$	$0,044 Pl$	$0,063 Pl$	$0,011 ql^2$
	M_C	$- 0,067 ql^2$	$- 0,100 Pl$	$- 0,178 Pl$	$- 0,250 Pl$	$- 0,042 ql^2$
	Q_{1B} (max)	$0,017 ql$	$0,025 P$	$0,044 P$	$0,063 P$	$0,011 ql$
	Q_{2B} (min)	$- 0,083 ql$	$- 0,125 P$	$- 0,222 P$	$- 0,313 P$	$- 0,053 ql$
Dầm bốn nhịp						
	M_{11}	$0,077 ql^2$	$0,170 Pl$	$0,238 Pl$	$0,295 Pl$	$0,052 ql^2$
	M_{12}	–	–	$0,143 Pl$	$0,299 Pl$	–
	M_{13}	–	–	–	$0,074 Pl$	–
	M_{21}	$0,037 ql^2$	$0,116 Pl$	$0,079 Pl$	$0,007 Pl$	$0,028 ql^2$
	M_{22}	–	–	$0,111 Pl$	$0,165 Pl$	–
	M_{23}	–	–	–	$0,074 Pl$	–
	M_B	$- 0,107 ql^2$	$- 0,161 Pl$	$- 0,286 Pl$	$- 0,402 Pl$	$- 0,067 ql^2$
	M_C	$- 0,071 ql^2$	$- 0,107 Pl$	$- 0,190 Pl$	$- 0,268 Pl$	$- 0,045 ql^2$
	$A = Q_{1A}$	$0,393 ql$	$0,339 P$	$0,714 P$	$1,098 P$	$0,183 ql$
	B	$1,143 ql$	$1,214 P$	$2,381 P$	$3,536 P$	$0,590 ql$
	C	$0,929 ql$	$0,892 P$	$1,810 P$	$2,732 P$	$0,455 ql$
	Q_{1B}	$- 0,607 ql$	$- 0,661 P$	$- 1,286 P$	$- 1,902 P$	$- 0,317 ql$
	Q_{2B}	$0,536 ql$	$0,554 P$	$1,095 P$	$1,634 P$	$0,273 ql$
Q_{2C}	$- 0,464 ql$	$- 0,446 P$	$- 0,905 P$	$- 1,366 P$	$- 0,228 ql$	

Bảng 2.5.4 (tiếp)

1	2	3	4	5	6	7
	M_{11} (max)	$0,100 q\ell^2$	$0,210 P\ell$	$0,286 P\ell$	$0,325 P\ell$	$0,067 q\ell^2$
	M_{12} (max)	–	–	$0,238 P\ell$	$0,400 P\ell$	–
	M_{13} (max)	–	–	–	$0,224 P\ell$	–
	M_{21} (min)	–	$-0,067 P\ell$	$-0,127 P\ell$	$-0,184 P\ell$	$-0,028 q\ell^2$
	M_{22} (min)	–	–	$-0,111 P\ell$	$-0,167 P\ell$	–
	M_{23} (min)	–	–	–	$-0,151 P\ell$	–
	M_B	$-0,054 q\ell^2$	$-0,080 P\ell$	$-0,143 P\ell$	$-0,201 P\ell$	$-0,034 q\ell^2$
	M_C	$-0,036 q\ell^2$	$-0,054 P\ell$	$-0,095 P\ell$	$-0,134 P\ell$	$-0,023 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$ (max)	$0,446 q\ell$	$0,420 P$	$0,857 P$	$1,299 P$	$0,217 q\ell$
	M_{11} (min)	–	$-0,040 P\ell$	$-0,048 P\ell$	$-0,050 P\ell$	$-0,015 q\ell^2$
	M_{12} (min)	–	–	$-0,095 P\ell$	$-0,100 P\ell$	–
	M_{13} (min)	–	–	–	$-0,151 P\ell$	–
	M_{21} (max)	$0,080 q\ell^2$	$0,183 P\ell$	$0,206 P\ell$	$0,191 P\ell$	$0,056 q\ell^2$
	M_{22} (max)	–	–	$0,222 P\ell$	$0,333 P\ell$	–
	M_{23} (max)	–	–	–	$0,224 P\ell$	–
	M_B	$-0,054 q\ell^2$	$-0,080 P\ell$	$-0,143 P\ell$	$-0,201 P\ell$	$-0,034 q\ell^2$
	M_C	$-0,036 q\ell^2$	$-0,054 P\ell$	$-0,095 P\ell$	$-0,134 P\ell$	$-0,023 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$ (min)	$-0,054 q\ell^2$	$-0,080 P$	$-0,143 P$	$-0,201 P$	$-0,034 q\ell$

Bảng 2.5.4 (tiếp)

1	2	3	4	5	6	7
	M_B (min) M_C M_D B (max) Q_{1B} (min) Q_{2B} (max)	$-0,121 ql^2$ $-0,018 ql^2$ $-0,058 ql^2$ $1,223 ql$ $-0,621 ql$ $0,603 ql$	$-0,181 Pl$ $-0,027 Pl$ $-0,087 Pl$ $1,335 P$ $-0,681 P$ $0,654 P$	$-0,321 Pl$ $-0,048 Pl$ $-0,155 Pl$ $2,595 P$ $-1,324 P$ $1,274 P$	$-0,452 Pl$ $-0,067 Pl$ $-0,218 Pl$ $3,837 P$ $-1,952 P$ $1,885 P$	$-0,076 ql^2$ $-0,012 ql^2$ $-0,036 ql^2$ $0,639 ql$ $-0,326 ql$ $0,314 ql$
	M_B (max) M_C M_D B (min) Q_{1B} (max) Q_{2B} (min)	$0,043 ql^2$ $-0,054 ql^2$ $-0,049 ql^2$ $-0,080 ql$ $0,013 ql$ $-0,067 ql$	$0,020 Pl$ $-0,080 Pl$ $-0,074 Pl$ $-0,121 P$ $0,020 P$ $-0,100 P$	$0,036 Pl$ $-0,143 Pl$ $-0,131 Pl$ $-0,214 P$ $0,036 P$ $-0,178 P$	$0,050 Pl$ $-0,201 Pl$ $-0,184 Pl$ $-0,301 P$ $0,050 P$ $-0,251 P$	$0,009 ql^2$ $-0,033 ql^2$ $-0,031 ql^2$ $0,050 ql$ $0,009 ql$ $-0,041 ql$
	M_B M_C (min) C (max) Q_{2C} (min)	$-0,036 ql^2$ $-0,107 ql^2$ $1,143 ql$ $-0,571 ql$	$-0,054 Pl$ $-0,161 Pl$ $1,214 P$ $-0,607 P$	$-0,095 Pl$ $-0,286 Pl$ $2,381 P$ $-1,191 P$	$-0,134 Pl$ $-0,402 Pl$ $3,536 P$ $-1,768 P$	$-0,023 ql^2$ $-0,067 ql^2$ $0,589 ql$ $-0,295 ql$
	M_B M_C (max) C (min) Q_{2C} (max)	$-0,071 ql^2$ $0,036 ql^2$ $-0,214 ql$ $0,107 ql$	$-0,107 Pl$ $0,054 Pl$ $-0,321 P$ $0,161 P$	$-0,190 Pl$ $0,095 Pl$ $-0,571 P$ $0,286 P$	$-0,268 Pl$ $0,134 Pl$ $-0,804 P$ $0,402 P$	$-0,050 ql^2$ $0,022 ql^2$ $-0,134 ql$ $0,067 ql$



Bảng 2.5.4 (tiếp)

1	2	3	4	5	6	7
Dầm năm nhịp						
	M_{11}	$0,078 ql^2$	$0,171 Pl$	$0,240 Pl$	$0,276 Pl$	$0,053 ql^2$
	M_{12}	–	–	$0,146 Pl$	$0,303 Pl$	–
	M_{13}	–	–	–	$0,079 Pl$	–
	M_{21}	$0,33 ql^2$	$0,112 Pl$	$0,076 Pl$	$0,005 Pl$	$0,062 ql^2$
	M_{22}	–	–	$0,099 Pl$	$0,155 Pl$	–
	M_{23}	–	–	–	$0,054 Pl$	–
	M_{31}	$0,046 ql^2$	$0,132 Pl$	$0,123 Pl$	$0,079 Pl$	$0,034 ql^2$
	M_{32}	–	–	$0,123 Pl$	$0,204 Pl$	–
	M_B	$-0,105 ql^2$	$-0,158 Pl$	$-0,281 Pl$	$-0,395 Pl$	$-0,066 ql^2$
	M_C	$-0,079 ql^2$	$-0,118 Pl$	$-0,211 Pl$	$-0,296 Pl$	$-0,050 ql^2$
	$A = Q_{1A}$	$0,395 ql$	$0,342 P$	$0,719 P$	$1,105 P$	$0,185 ql$
	B	$1,132 ql$	$1,198 P$	$2,351 P$	$3,494 P$	$0,582 ql$
	C	$0,974 ql$	$0,960 P$	$1,930 P$	$2,901 P$	$0,484 ql$
	Q_{1B}	$-0,605 ql$	$-0,658 P$	$-1,281 P$	$-1,895 P$	$-0,316 ql$
	Q_{2B}	$0,526 ql$	$0,540 P$	$1,070 P$	$1,599 P$	$0,266 ql$
	Q_{2C}	$-0,474 ql$	$-0,460 P$	$-0,930 P$	$-1,401 P$	$-0,234 ql$
	Q_{3C}	$0,500 ql$	$0,500 P$	$1,000 P$	$1,500 P$	$0,250 ql$

Bảng 2.5.4 (tiếp)

1	2	3	4	5	6	7
	M_{11} max	$0,100 q\ell^2$	$0,211 P\ell$	$0,287 P\ell$	$0,326 P\ell$	$0,068 q\ell^2$
	M_{12} max	–	–	$0,240 P\ell$	$0,401 P\ell$	–
	M_{13} max	–	–	–	$0,227 P\ell$	–
	M_{21} min	–	$-0,069 P\ell$	$-0,129 P\ell$	$-0,185 P\ell$	$-0,029 q\ell^2$
	M_{22} min	–	–	$-0,117 P\ell$	$-0,173 P\ell$	–
	M_{23} min	–	–	–	$-0,160 P\ell$	–
	M_{31} max	$0,086 q\ell^2$	$0,191 P\ell$	$0,228 P\ell$	$0,227 P\ell$	$0,059 q\ell^2$
	M_{32} max	–	–	$0,228 P\ell$	$0,352 P\ell$	–
	M_B	$-0,053 q\ell^2$	$-0,079 P\ell$	$-0,140 P\ell$	$-0,197 P\ell$	$-0,033 q\ell^2$
	M_C	$-0,039 q\ell^2$	$-0,059 P\ell$	$-0,105 P\ell$	$-0,148 P\ell$	$-0,025 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$ (max)	$0,447 q\ell$	$0,421 P$	$0,860 P$	$1,303 P$	$0,217 q\ell$
	M_{11} min	–	$-0,039 P\ell$	$-0,047 P\ell$	$-0,050 P\ell$	$-0,015 q\ell^2$
	M_{12} min	–	–	$-0,094 P\ell$	$-0,099 P\ell$	–
	M_{13} min	–	–	–	$-0,148 P\ell$	–
	M_{21} (max)	$0,079 q\ell^2$	$0,181 P\ell$	$0,205 P\ell$	$0,190 P\ell$	$0,055 q\ell^2$
	M_{22} (max)	–	–	$0,216 P\ell$	$0,327 P\ell$	–
	M_{23} (max)	–	–	–	$0,215 P\ell$	–
	M_{31} (min)	–	$-0,059 P\ell$	$-0,105 P\ell$	$-0,148 P\ell$	$-0,025 q\ell$
	M_{32} (min)	–	–	$-0,105 P\ell$	$-0,148 P\ell$	–
	M_B	$-0,053 q\ell^2$	$-0,079 P\ell$	$-0,140 P\ell$	$-0,198 P\ell$	$-0,033 q\ell^2$
	M_C	$-0,039 q\ell^2$	$-0,059 P\ell$	$-0,105 P\ell$	$-0,148 P\ell$	$-0,025 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$ (min)	$-0,053 q\ell$	$-0,079 P$	$0,140 P$	$-0,198 P\ell$	$-0,033 q\ell$

Bảng 2.5.4 (tiếp)

1	2	3	4	5	6	7
	M_B (min)	$-0,120 q\ell^2$	$-0,179 P\ell$	$-0,319 P\ell$	$-0,449 P\ell$	$-0,075 q\ell^2$
	M_C	$-0,022 q\ell^2$	$-0,032 P\ell$	$-0,057 P\ell$	$-0,081 P\ell$	$-0,014 q\ell^2$
	M_D	$-0,044 q\ell^2$	$-0,066 P\ell$	$-0,118 P\ell$	$-0,166 P\ell$	$-0,027 q\ell^2$
	M_E	$-0,051 q\ell^2$	$-0,077 P\ell$	$-0,137 P\ell$	$-0,193 P\ell$	$-0,032 q\ell^2$
	B (max)	$1,218 q\ell$	$1,327 P$	$2,581 P$	$3,816 P$	$0,636 q\ell$
	Q_{1B} (min)	$-0,620 q\ell$	$-0,679 P$	$-1,319 P$	$-1,949 P$	$-0,325 q\ell$
	Q_{2B} (max)	$0,598 q\ell$	$0,647 P$	$1,262 P$	$1,867 P$	$0,311 q\ell$
	M_B	$-0,035 q\ell^2$	$-0,052 P\ell$	$-0,093 P\ell$	$-0,130 P\ell$	$-0,022 q\ell^2$
	M_C (min)	$-0,111 q\ell^2$	$-0,167 P\ell$	$-0,297 P\ell$	$-0,417 P\ell$	$-0,070 q\ell^2$
	M_D	$-0,020 q\ell^2$	$-0,031 P\ell$	$-0,054 P\ell$	$-0,076 P\ell$	$-0,013 q\ell^2$
	M_E	$-0,057 q\ell^2$	$-0,086 P\ell$	$-0,153 P\ell$	$-0,215 P\ell$	$-0,036 q\ell^2$
	C (max)	$0,167 q\ell$	$-1,251 P$	$2,447 P$	$3,628 P$	$0,605 q\ell$
	Q_{2C} (min)	$-0,576 q\ell$	$-0,615 P$	$-1,204 P$	$-1,787 P$	$-0,298 q\ell$
	Q_{3C} (max)	$0,591 q\ell$	$0,636 P$	$1,242 P$	$1,841 P$	$-0,307 q\ell$

Bảng 2.5.4 (tiếp)

1	2	3	4	5	6	7
	M_B (max)	$-0,044 q\ell^2$	$0,022 P\ell$	$0,038 P\ell$	$0,054 P\ell$	$0,009 q\ell^2$
	M_C	$-0,057 q\ell^2$	$-0,086 P\ell$	$-0,153 P\ell$	$-0,215 P\ell$	$-0,036 q\ell^2$
	M_D	$-0,035 q\ell^2$	$-0,052 P\ell$	$-0,093 P\ell$	$-0,130 P\ell$	$-0,022 q\ell^2$
	M_E	$-0,054 q\ell^2$	$-0,081 P\ell$	$-0,144 P\ell$	$-0,202 P\ell$	$-0,034 q\ell^2$
	B (min)	$-0,086 q\ell$	$-0,129 P$	$-0,230 P$	$-0,323 P$	$-0,054 q\ell$
	Q_{1B} (max)	$0,014 q\ell$	$0,022 P$	$0,038 P$	$0,054 P$	$0,009 q\ell$
	Q_{2B} (min)	$-0,072 q\ell$	$-0,108 P$	$-0,191 P$	$-0,269 P$	$-0,045 q\ell$
	M_B	$-0,071 q\ell^2$	$-0,106 P\ell$	$-0,188 P\ell$	$-0,265 P\ell$	$-0,044 q\ell^2$
	M_C (max)	$0,032 q\ell^2$	$0,048 P\ell$	$0,086 P\ell$	$0,121 P\ell$	$0,020 q\ell^2$
	M_D	$-0,059 q\ell^2$	$-0,088 P\ell$	$-1,156 P\ell$	$-0,220 P\ell$	$-0,037 q\ell^2$
	M_E	$-0,048 q\ell^2$	$-0,072 P\ell$	$-0,128 P\ell$	$-0,179 P\ell$	$-0,030 q\ell^2$
	C (min)	$-0,194 q\ell$	$-0,291 P$	$-0,517 P$	$-0,727 P$	$-0,120 q\ell$
	Q_{2C} (max)	$0,103 q\ell$	$0,154 P$	$0,274 P$	$0,386 P$	$0,064 q\ell$
	Q_{3C} (min)	$-0,091 q\ell$	$-0,136 P$	$-0,242 P$	$-0,341 P$	$-0,057 q\ell$

Bảng 2.5.5: Mômen uốn trong dầm liên tục có độ dài nhịp như nhau do gối tựa lún

Mômen gối tựa được tính theo công thức

$$M = k \frac{EJ}{l^2} \Delta$$

trong đó:

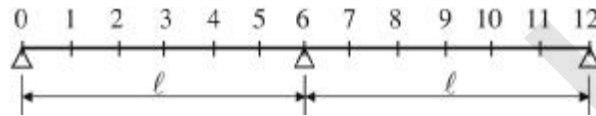
k - hệ số lấy trong bảng;

Δ - độ lún của gối tựa.

Sơ đồ dầm	Mômen gối	Lún tại gối tựa					
		A	B	C	D	E	F
	M_B	- 1,5000	3,0000	- 1,5000	-	-	-
	M_B M_C	- 1,6000 0,4000	3,6000 - 2,4000	- 2,400 3,6000	0,4000 - 1,6000	- -	- -
	M_B M_C M_D	- 1,6072 0,4286 - 0,1072	3,6429 - 2,5714 0,6429	- 2,5714 4,2857 - 2,5714	0,6429 - 2,5714 3,6429	- 0,1072 0,4286 - 1,6072	- - -
	M_B M_C M_D M_E	- 1,6075 0,4306 - 0,1148 0,0287	3,6453 - 2,5836 0,6890 - 0,1721	- 2,5826 4,3346 - 2,7558 0,6882	0,6882 - 2,7558 4,3346 - 2,5826	- 0,1721 0,6890 - 2,5836 3,6453	0,0287 - 0,1148 0,4306 - 1,6075

Bảng 2.5.6: Tung độ các đường ảnh hưởng mômen uốn và lực cắt trong dầm liên tục có độ dài nhịp như nhau

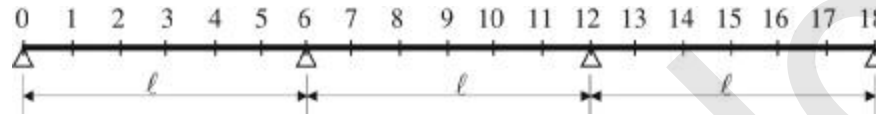
1. Dầm hai nhịp



Thứ tự tung độ	Tung độ đah M tại các mặt cắt (nhân với l)						Tung độ đah Q_0
	1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	0	0	1,0000
1	0,1323	0,0976	0,0632	0,0285	-0,0060	-0,0405	0,7928
2	0,0988	0,1976	0,1298	0,0619	-0,0061	-0,0740	0,5927
3	0,0677	0,1354	0,2031	0,1041	0,0051	-0,0938	0,4062
4	0,0402	0,0803	0,1205	0,1606	0,0340	-0,0926	0,2407
5	0,0172	0,0343	0,0516	0,0687	0,0860	-0,0636	0,1031
6	0	0	0	0	0	0	0
7	-0,0106	-0,0212	-0,0348	-0,0424	-0,0530	-0,0636	-0,0636
8	-0,0154	-0,0309	-0,0463	-0,0617	-0,0772	-0,0926	-0,0926
9	-0,0156	-0,0313	-0,0469	-0,0626	-0,0782	-0,0938	-0,0938
10	-0,0123	-0,0247	-0,0370	-0,0494	-0,0617	-0,0740	-0,0740
11	-0,0068	-0,0135	-0,0203	-0,0270	-0,0333	-0,0405	-0,0405
12	0	0	0	0	0	0	0

Bảng 2.5.6 (tiếp)

2. Dầm ba nhịp

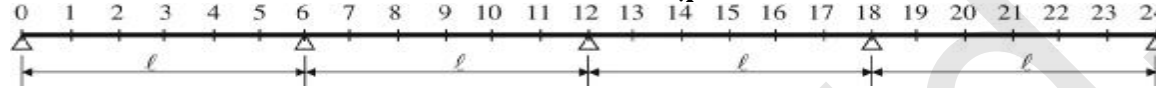


Thứ tự tung độ	Tung độ đanh M tại các mặt cắt (nhân với l)									Tung độ đanh Q	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_0	Q_6 phải
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	0
1	0,1318	0,0967	0,0618	0,0267	-0,0083	-0,0432	-0,0342	-0,0252	-0,0162	0,7901	0,0540
2	0,0980	0,1960	0,1273	0,0585	-0,0102	-0,0790	-0,0625	-0,0461	-0,0296	0,5877	0,0987
3	0,0667	0,1333	0,2000	0,1000	0	-0,1000	-0,0792	-0,0583	-0,0375	0,4000	0,1250
4	0,0391	0,0782	0,1174	0,1565	0,0289	-0,0987	-0,0782	-0,0576	-0,0370	0,2346	0,1234
5	0,0165	0,0329	0,0495	0,0659	0,0826	-0,0677	-0,0536	-0,0395	-0,0254	0,0990	0,0846
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0000 *
7	0,0095	-0,0190	-0,0285	-0,0379	-0,0474	-0,0569	-0,0872	0,0644	0,0418	-0,0569	1,0000
8	-0,0132	-0,0263	-0,0395	-0,0526	-0,0658	-0,0789	0,0364	0,1516	0,1002	-0,0789	0,8639
9	-0,0125	-0,0250	-0,0375	-0,0500	-0,0625	-0,0750	-0,0083	0,0917	0,1750	-0,0750	0,6913
10	-0,0090	-0,0181	-0,0271	-0,0362	-0,0452	-0,0543	-0,0028	0,0487	0,1002	-0,0543	0,5000
11	-0,0044	-0,0088	-0,0131	-0,0175	-0,0219	-0,0263	-0,0036	0,0191	0,0418	-0,0263	0,3087
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1361
13	0,0028	0,0057	0,0085	0,0113	0,0141	0,0169	0,0028	-0,0113	-0,0254	0,0169	0
14	0,0041	0,0082	0,0123	0,0165	0,0206	0,0247	0,0041	-0,0165	-0,0370	0,0247	-0,0846
15	0,0042	0,0083	0,0125	0,0167	0,0208	0,0250	0,0042	-0,0167	-0,0375	0,0250	-0,1234
16	0,0033	0,0066	0,0099	0,0132	0,0165	0,0197	0,0033	-0,0132	-0,0296	0,0197	-0,1250
17	0,0018	0,0036	0,0054	0,0072	0,0090	0,0108	0,0018	-0,0072	-0,0296	0,0197	-0,0987
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0108	-0,0540
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

* Tại mặt cắt này Q có hai giá trị (ghi dưới dạng phân số)

Bảng 2.5.6 (tiếp)

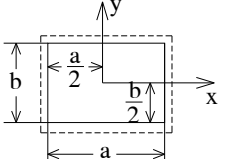
3. Dầm bốn nhịp



Thứ tự tung độ	Tung độ đanh M tại các mặt cắt (nhân với l)												Tung độ đanh Q	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Q_0	Q_6 phải
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	0
1	0,1318	0,0966	0,0617	0,0266	-0,0084	-0,0434	-0,0343	-0,0251	-0,0159	-0,0068	0,0024	0,0116	0,7899	0,0550
2	0,0979	0,1958	0,1271	0,0582	-0,0106	-0,0793	-0,0626	-0,0459	-0,0291	-0,0124	0,0044	0,0212	0,5874	0,1005
3	0,0666	0,1332	0,1998	0,0997	-0,0004	-0,1004	-0,0792	-0,0580	-0,0368	-0,0156	0,0056	0,0268	0,3996	0,1272
4	0,0391	0,0781	0,1172	0,1562	-0,0285	-0,0992	-0,0782	-0,0573	-0,0364	-0,0154	0,0055	0,0265	0,2341	0,1257
5	0,0164	0,0328	0,0494	0,0657	-0,0823	-0,0681	-0,0537	-0,0393	-0,0249	-0,0106	0,0038	0,0182	0,0986	0,0863
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0000 *
7	-0,0094	-0,0188	-0,0288	-0,0377	-0,0471	-0,0565	0,0872	0,0640	0,0411	0,0179	-0,0051	-0,0284	-0,0565	0,8617
8	-0,0130	-0,0260	-0,0390	-0,0520	-0,0650	-0,0780	-0,0365	0,1509	0,0987	0,0464	-0,0059	-0,0582	-0,0780	0,6865
9	-0,0123	-0,0246	-0,0369	-0,0491	-0,0614	-0,0737	-0,0085	0,0907	0,1730	0,0885	0,0041	-0,0804	-0,0737	0,4933
10	-0,0088	-0,0176	-0,0265	-0,0353	-0,0441	-0,0529	-0,0026	0,0477	0,0981	0,1483	0,0318	-0,0846	-0,0529	0,3016
11	-0,0042	-0,0084	-0,0127	-0,0169	-0,0211	-0,0253	-0,0035	0,0183	0,0403	0,0620	0,0340	-0,0610	-0,0253	0,1310
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0,0026	0,0051	0,0077	0,0102	0,0128	0,0153	0,0026	-0,0101	-0,0229	-0,0356	-0,0483	-0,0610	0,0153	-0,0763
14	0,0035	0,0071	0,0106	0,0141	0,0177	0,0212	0,0036	-0,0141	-0,0317	-0,0493	-0,0670	-0,0846	0,0212	-0,1058
15	0,0034	0,0067	0,0101	0,0134	0,0168	0,0201	0,0034	-0,0134	-0,0302	-0,0469	-0,0630	-0,0804	0,0201	-0,1005
16	0,0024	0,0049	0,0073	0,0097	0,0121	0,0145	0,0024	-0,0097	-0,0218	-0,0339	-0,0461	-0,0582	0,0145	-0,0727
17	0,0012	0,0024	0,0035	0,0047	0,0059	0,0070	0,0012	-0,0047	-0,0106	-0,0164	-0,0223	-0,0281	0,0070	-0,0351
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	-0,0008	-0,0015	-0,0023	-0,0030	-0,0038	-0,0045	-0,0008	0,0030	0,0068	0,0106	0,0144	0,0182	-0,0045	0,0227
20	-0,0011	-0,0022	-0,0033	-0,0044	-0,0055	-0,0066	-0,0011	0,0044	0,0999	0,0154	0,0209	0,0265	-0,0066	0,0331
21	-0,0011	-0,0022	-0,0034	-0,0045	-0,0056	-0,0067	-0,0011	0,0045	0,0101	0,0156	0,0212	0,0268	-0,0067	0,0335
22	-0,0009	-0,0018	-0,0026	-0,0035	-0,0044	-0,0053	-0,0009	0,0035	0,0079	0,0123	0,0168	0,0212	-0,0058	0,0265
23	-0,0005	-0,0010	-0,0015	-0,0019	-0,0024	-0,0029	-0,0005	0,0019	0,0043	0,0068	0,0092	0,0116	-0,0029	0,0145
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

* Tại mặt cắt này Q có hai giá trị (ghi dưới dạng phân số)

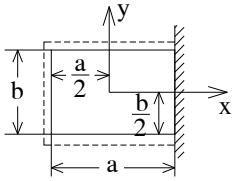
Bảng 2.6.1: Tính tấm chữ nhật chịu tải phân bố hình tam giác

	<p style="text-align: center;">Trờng hợp 1: Tấm tựa tự do tại các cạnh, chịu tải trọng phân bố đều $\mu = 0,25$</p>															Thừa số phụ
	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{b}{a}$															
Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	3	4	5	∞	
Độ võng w ở các điểm																
$x = 0; y = 0$	0,0457	0,0546	0,0635	0,0718	0,0793	0,0868	0,0934	0,0991	0,1047	0,1096	0,1139	0,1376	0,1442	0,1459	0,1465	$\frac{pa^4}{Eh^3}$
$x = 0; y = \frac{b}{4}$	0,0329	0,0396	0,0464	0,0527	0,0587	0,0644	0,0698	0,0748	0,0792	0,0839	0,0869	0,1156	0,1301	0,1452	0,1465	$\frac{pa^4}{Eh^3}$
$x = \frac{a}{4}; b = 0$	0,0329	0,0395	0,0457	0,0516	0,0571	0,0622	0,0669	0,0710	0,0749	0,0783	0,0814	0,0981	0,1028	0,1040	0,1044	$\frac{pa^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_y																
$x = 0; y = 0$	0,0460	0,0535	0,0609	0,0677	0,0738	0,0798	0,0849	0,0896	0,0938	0,0975	0,1008	0,1186	0,1234	0,1246	0,1250	pa^2
$x = 0; y = \frac{b}{4}$	0,0340	0,0399	0,0456	0,0508	0,0557	0,0606	0,0650	0,0692	0,0726	0,0763	0,0795	0,1016	0,1128	0,1187	0,1250	pa^2
$x = \frac{a}{4}; y = 0$	0,0378	0,0432	0,0484	0,0532	0,0577	0,0617	0,0654	0,0687	0,0717	0,0743	0,0766	0,0892	0,0296	0,0935	0,0937	pa^2
Mô men uốn M_z																
$x = 0; y = 0$	0,0460	0,0472	0,0475	0,0474	0,0472	0,0462	0,0454	0,0444	0,0436	0,0425	0,0415	0,0345	0,0322	0,0315	0,0312	pa^2
$x = 0; y = \frac{b}{4}$	0,0378	0,0395	0,0403	0,0411	0,0417	0,0420	0,0421	0,0422	0,0423	0,0420	0,0419	0,0392	0,0365	0,0344	0,0312	pa^2
$x = \frac{a}{4}; b = 0$	0,0340	0,0347	0,0349	0,0349	0,0345	0,0340	0,0334	0,0328	0,0321	0,0314	0,0307	0,0259	0,0242	0,0236	0,0234	pa^2

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{b}{a}$															Thừa số phụ
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	3	4	5	∞	
Lực ngang V_{x_z}																
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,338	0,360	0,380	0,397	0,411	0,424	0,435	0,444	0,452	0,459	0,465	0,493	0,498	0,500	0,500	pa
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0,281	0,302	0,320	0,336	0,350	0,363	0,376	0,386	0,395	0,404	0,412	0,461	0,482	0,492	0,500	pa
Lực ngang V_{y_z}																
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,338	0,315	0,294	0,275	0,258	0,242	0,228	0,216	0,205	0,194	0,185	0,124	0,093	0,074	-	pb
$x = \frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	0,281	0,261	0,243	0,227	0,213	0,200	0,188	0,178	0,168	0,160	0,152	0,102	0,076	0,061	-	pb
Phản lực gối tựa Q_x																
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,426	0,445	0,460	0,473	0,483	0,490	0,495	0,500	0,502	0,505	0,506	0,506	0,502	0,501	0,500	pa
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{4}$	0,360	0,380	0,396	0,410	0,423	0,433	0,442	0,450	0,457	0,463	0,468	0,496	0,503	0,505	0,500	pa
Phản lực gối tựa Q_y																
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,426	0,405	0,383	0,363	0,343	0,325	0,308	0,292	0,278	0,265	0,252	0,170	0,127	0,102	-	pb
$x = \frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	0,360	0,339	0,320	0,301	0,284	0,269	0,255	0,241	0,229	0,218	0,290	0,140	0,105	0,084	-	pb
Phản lực gối tựa Q_0	-0,070	-0,069	-0,068	-0,066	-0,064	-0,061	-0,059	-0,056	-0,054	-0,052	-0,049	-0,034	-0,025	-0,020	-	pab

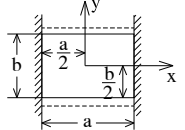
Bảng 2.6.1 (tiếp)

	<p>Trường hợp 2: Tấm tựa tự do tại 3 cạnh, 1 cạnh ngàm, chịu tải trọng phân bố đều $\mu = 0,25$</p>																
	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$								Thừa số phụ	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$							Thừa số phụ
	0	1:2	1:1,5	1,4	1:1,3	1:1,2	1:1,1	1,0		1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	∞	
Độ võng w ở tâm $x = \frac{a}{2}; y = \frac{a}{2}$	0,059	0,054	0,048	0,045	0,043	0,039	0,036	0,031	$\frac{pa^4}{Eh^3}$	0,040	0,048	0,056	0,065	0,072	0,104	0,146	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_y $x = 0; y = 0$	0,062	0,059	0,054	0,051	0,049	0,046	0,042	0,038	pa^2	0,041	0,042	0,043	0,044	0,045	0,042	0,031	pb^2
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	-0,125	-0,122	-0,111	-0,108	-0,103	-0,098	-0,091	-0,084	pa^2	-0,092	-0,098	-0,104	-0,109	-0,112	-0,122	-0,512	pb^2
Mô men uốn M_z $x = 0; y = 0$	0,016	0,020	0,026	0,028	0,029	0,030	0,031	0,032	pa^2	0,040	0,047	0,055	0,061	0,068	0,093	0,125	pb^2
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	-0,031	-0,031	-0,028	-0,027	-0,026	-0,024	-0,023	-0,021	pa^2	-0,023	-0,025	-0,026	-0,027	-0,028	-0,031	-0,031	pb^2

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$								Thừa số phụ	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$							Thừa số phụ
	0	1:2	1:1,5	1,4	1:1,3	1:1,2	1:1,1	1,0		1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	∞	
Lực ngang V_{x_z}																	
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,375	0,371	0,361	0,355	0,348	0,340	0,328	0,313	pa	0,297	0,282	0,266	0,252	0,238	0,184	-	pa
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,625	0,644	0,633	0,628	0,622	0,612	0,598	0,581	pa	0,558	0,536	0,510	0,486	0,463	0,365	-	pa
Lực ngang V_{y_z}																	
$x = 0; y = \frac{b}{2};$	0	0,140	0,188	0,202	0,218	0,236	0,258	0,282	pb	0,308	0,331	0,353	0,372	0,389	0,448	0,500	pb
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0	-0,194	-0,216	-0,273	-0,299	-0,320	-0,345	-0,371	pb	-0,396	-0,417	-0,434	0,451	-0,460	-0,489	-0,500	pb
Phản lực gối tựa Q_x																	
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,375	0,398	0,400	0,400	0,399	0,397	0,391	0,383	pa	0,371	0,358	0,344	0,329	0,315	0,250	-	pa
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,625	0,644	0,633	0,628	0,622	0,612	0,598	0,581	pa	0,558	0,536	0,510	0,486	0,463	0,365	-	pa
Phản lực gối tựa Q_y																	
$x = 0; y = \frac{b}{2};$	0	0,185	0,249	0,266	0,286	0,308	0,333	0,360	pb	0,376	0,391	0,404	0,417	0,434	0,466	0,500	pb
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0	-0,340	-0,456	-0,487	0,523	-0,560	-0,603	-0,650	pb	-0,692	-0,729	-0,760	-0,789	-0,804	-0,856	0,875	pb
Phản lực gối tựa Q_0																	
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	-	-0,034	-0,042	-0,046	-0,050	-0,052	-0,055	-0,057	pha	-0,058	-0,060	-0,059	-0,059	-0,057	-0,049	-	pha

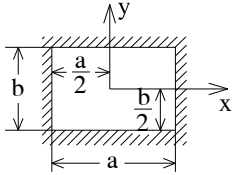
Bảng 2.6.1 (tiếp)

	Trường hợp 3: Tấm có 2 cạnh tựa tự do và 2 cạnh bị ngàm, chịu tải trọng phân bố đều $\mu = 0,25$ $a < b$								Thừa số phụ
	Tỷ số các cạnh của tấm b/a								
Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	∞	2	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1	
Độ võng w ở tâm $x = 0; y = 0$	0,0293	0,0293	0,0278	0,0270	0,0262	0,0250	0,0235	0,0220	$\frac{pa^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_y $x = 0; y = 0$ $x = \pm \frac{a}{2}; y = 0$	0,0417 -0,0833	0,0420 -0,0842	0,0403 -0,0829	-0,0395 -0,0808	0,0383 -0,0793	0,0369 -0,0770	0,0349 -0,0739	0,0325 -0,0698	pa^2 pa^2
Mô men uốn M_x $x = 0; y = 0$ Lực ngang V_{x_2} $x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,0104 0,500	0,0121 0,511	0,0152 0,524	0,0170 0,525	0,0184 0,527	0,0199 0,526	0,0214 0,523	0,0230 0,516	pa^2 pa
Lực ngang V_{y_2} $x = 0; y = \frac{b}{2}$ $x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0 0	0,119 -0,164	0,160 -0,219	0,171 -0,235	0,185 -0,253	0,202 -0,275	0,221 -0,299	0,214 -0,327	pb pb
Phản lực gối tựa Q_y $x = 0; y = \frac{b}{2}$ $x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0 0	0,156 -0,287	0,209 -0,384	0,224 -0,411	0,242 -0,444	0,263 -0,480	0,287 -0,523	0,315 -0,571	pb pb

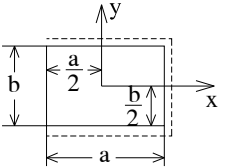
Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$															Thừa số phụ
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	3	4	5	∞	
Độ võng w ở tâm	0,0220	0,0284	0,0359	0,0438	0,0519	0,0599	0,0647	0,0752	0,0823	0,0889	0,1017	0,1314	0,1425	0,1455	0,1465	$\frac{pa^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_y ở tâm	0,0325	0,0359	0,0387	0,0409	0,0425	0,0435	0,0441	0,0443	0,0442	0,0439	0,0434	0,0365	0,0329	0,0324	0,0312	pb^2
Mô men uốn M_x ở tâm	0,0230	0,0293	0,0361	0,0431	0,0501	0,0569	0,0635	0,0697	0,0755	0,0808	0,0857	0,1139	0,1221	0,1243	0,1250	pb^2
Mô men uốn M_y ở tâm gối tựa	-0,0698	-0,0788	-0,868	-0,0938	-0,0998	-0,1049	-0,1090	-0,1124	-0,1152	-0,1173	-0,1191	-0,1246	-0,1250	-0,1250	-0,1250	pb^2
Lực ngang V_{xz} $x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,516	0,506	0,492	0,477	0,461	0,444	0,426	0,409	0,392	0,376	0,360	0,247	0,188	0,148	-	pa
Lực ngang V_{yz} $x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,244	0,270	0,0294	0,318	0,0339	0,359	0,378	0,394	0,408	0,421	0,432	0,485	0,497	0,499	0,500	pb
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	-0,327	-0,355	-0,380	-0,402	-0,421	-0,437	-0,450	-0,461	-0,469	-0,476	-0,481	-0,499	-0,500	-0,500	-0,500	pb
Phản lực gối tựa Q_y $x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,315	0,344	0,370	0,394	0,415	0,433	0,449	0,461	0,472	0,480	0,487	0,506	0,505	0,501	0,500	pb
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	-0,571	-0,621	-0,665	-0,703	-0,736	-0,764	-0,787	-0,806	-0,821	-0,833	-0,842	-0,873	-0,875	-0,875	-0,875	pb

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{b}{a}$						Thừa số phụ
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
 <p>Trường hợp 5: Tấm có tất cả các cạnh ngàm, chịu tải trọng phân bố đều $\mu = 0,25$</p>							
Độ võng w ở điểm $x = 0; y = 0$	0,0143	0,170	0,0200	0,0216	0,0234	0,0248	$\frac{pa^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_y $x = 0; y = 0$ $x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,0220 -0,0517	0,0258 -0,0554	0,0293 -0,0612	0,0321 -0,0668	0,0344 -0,0714	0,0363 -0,0753	pa^2 pa^2
Mô men uốn M_x $x = 0; y = 0$ $x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,0220 -0,0517	0,0223 -0,0491	0,0219 -0,0504	0,0210 -0,0508	0,0199 -0,0511	0,0187 -0,051	pa^2 pa^2
Lực ngang V_{xz} $x = \frac{a}{2}; y = 0$ Lực ngang V_{yz} $x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,452 0,452	0,448 0,412	0,471 0,381	0,491 0,352	0,505 0,327	0,517 0,305	pa pb

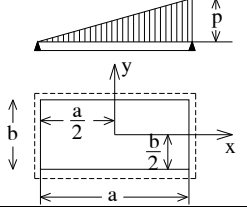
Bảng 2.6.1 (tiếp)

	<p align="center">Trường hợp 6: Tấm tựa tự do tại 3 cạnh, chịu tải trọng phân bố đều $\mu = 0,25$</p>															Thừa số phụ
	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$															
Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	1:2	1:1,5	1:1,4	1:1,3	1:1,2	1:1,1	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	3	∞	
Độ võng w ở điểm																
$x = 0; y = 0$	0,0414	0,0598	0,0646	0,0699	0,0756	0,0820	0,0885	0,0951	0,1010	0,1061	0,1107	0,1148	0,1293	0,1417	0,1465	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,0735	0,1040	0,1106	0,1176	0,1249	0,1326	0,1390	0,1451	0,1498	0,1534	0,1563	0,1585	0,1636	0,1652	0,1653	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_x																
$x = 0; y = 0$	0,0370	0,0536	0,0578	0,0625	0,0675	0,0731	0,0787	0,0842	0,0892	0,0935	0,0973	0,1006	0,1121	0,1215	0,1250	pb^2
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,0589	0,0819	0,373	0,0930	0,0992	0,1054	0,1106	0,1157	0,1196	0,1225	0,1249	0,1267	0,1309	0,1322	0,1322	pb^2
Mô men uốn M_y																
$x = 0; y = 0$	0,0218	0,0286	0,0306	0,0322	0,0336	0,0350	0,0362	0,0373	0,0376	0,0378	0,0378	0,0377	0,0361	0,0330	0,0312	pb^2
Lực ngang V_{x_z}																
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,300	0,336	0,343	0,349	0,354	0,359	0,362	0,365	0,367	0,368	0,369	0,370	0,371	0,371	0,371	pb
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,088	0,088	0,087	0,085	0,083	0,080	0,077	0,073	0,070	0,068	0,066	0,064	0,059	0,057	0,057	pb

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$															Thừa số phụ	
	1:2	1:1,5	1:1,4	1:1,3	1:1,2	1:1,1	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	3	∞		
Lực ngang V_{y_z}																	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,249	0,312	0,327	0,343	0,360	0,378	0,396	0,412	0,426	0,437	0,447	0,455	0,480	0,496	0,500		
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0,237	0,296	0,310	0,325	0,340	0,356	0,369	0,381	0,391	0,399	0,405	0,409	0,420	0,423	0,423	pb	
Phản lực gối tựa Q_x																	pb
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,404	0,458	0,467	0,476	0,483	0,488	0,496	0,501	0,503	0,506	0,507	0,508	0,510	0,510	0,510		
Phản lực gối tựa Q_y																	pb
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,338	0,384	0,395	0,405	0,416	0,427	0,438	0,448	0,456	0,463	0,469	0,473	0,488	0,498	0,500		
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0,177	0,222	0,233	0,243	0,255	0,267	0,277	0,286	0,293	0,299	0,303	0,307	0,315	0,317	0,317	pb	
Phản lực gối tựa Q_0																	pb
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	-0,080	-0,090	-0,062	-0,093	-0,095	-0,097	-0,098	-0,099	-0,100	-0,101	-0,101	-0,101	-0,102	-0,102	-0,102		
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0,061	0,062	0,061	0,059	0,058	0,056	0,054	0,052	0,050	0,049	0,047	0,046	0,043	0,042	0,042	pb	

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$															Thừa số phụ
	∞	5	4	3	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1	
 <p style="text-align: center;">Trường hợp 7: Tấm tựa tự do tại các cạnh, chịu tải trọng phân bố hình tam giác $\mu = 0,25$ $a > b$</p>																
Độ võng w ở điểm																
$x = -\frac{a}{4}; y = 0$	0,0366	0,0366	0,0366	0,0360	0,0325	0,0316	0,0304	0,0294	0,0280	0,0263	0,0245	0,0224	0,0201	0,0172	0,0147	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = 0; y = 0$	0,0732	0,0729	0,0721	0,0688	0,0569	0,0548	0,0523	0,0497	0,0467	0,0434	0,0397	0,0359	0,0317	0,0273	0,0228	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = \frac{a}{10}; y = 0$	0,0879	0,0875	0,0845	0,0709	0,0610	0,0583	0,0552	0,0521	0,0486	0,0449	0,0409	0,0366	0,0321	0,0276	0,0227	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = \frac{a}{4}; y = 0$	0,1099	0,1086	0,0935	0,0796	0,0553	0,0523	0,0488	0,0454	0,0418	0,0381	0,0342	0,0303	0,0263	0,0224	0,0182	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_y																
$x = -\frac{a}{4}; y = 0$	0,0078	0,0078	0,0078	0,0081	0,0094	0,0097	0,0102	0,0104	0,0108	0,0112	0,0116	0,0119	0,0122	0,0127	0,0126	pb^2
$x = 0; y = 0$	0,0156	0,0157	0,0161	0,0172	0,0207	0,0212	0,0218	0,0222	0,0227	0,0231	0,0236	0,0237	0,0238	0,0236	0,0230	pb^2
$x = \frac{a}{10}; y = 0$	0,0187	0,0193	0,0201	0,0223	0,0260	0,0264	0,0268	0,0271	0,0273	0,0275	0,0275	0,0274	0,0272	0,0265	0,0255	pb^2
$x = \frac{a}{4}; y = 0$	0,0234	0,0265	0,0286	0,0312	0,0325	0,0323	0,0321	0,0318	0,0314	0,0308	0,0301	0,0292	0,0281	0,0268	0,0252	pb^2

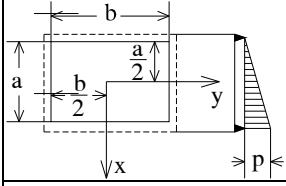
Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$															Thừa số phụ
	∞	5	4	3	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1	
Mô men uốn M_x																
$x = -\frac{a}{4}; y = 0$	0,0312	0,0312	0,0312	0,0309	0,0282	0,0276	0,0267	0,0259	0,0249	0,0236	0,0221	0,0206	0,0188	0,0165	0,0144	pb^2
$x = 0; y = 0$	0,0625	0,0623	0,0617	0,0593	0,0504	0,0487	0,0469	0,0448	0,0424	0,0399	0,0369	0,0338	0,0304	0,0267	0,0230	pb^2
$x = \frac{a}{10}; y = 0$	0,0750	0,742	0,0726	0,0676	0,0547	0,0526	0,0502	0,0477	0,0449	0,0419	0,0386	0,0351	0,0313	0,0275	0,0235	pb^2
$x = \frac{a}{4}; y = 0$	0,0937	0,0875	0,0816	0,0708	0,0513	0,0487	0,0459	0,0432	0,0401	0,0369	0,0337	0,0303	0,0268	0,0234	0,0196	pb^2
Lực ngang V_{x_z}																
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	–	0,005	0,008	0,014	0,031	0,033	0,037	0,041	0,045	0,051	0,057	0,063	0,071	0,080	0,090	pb
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{4}$	–	0,004	0,006	0,010	0,023	0,025	0,028	0,031	0,034	0,038	0,043	0,048	0,054	0,061	0,069	pb
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	–	0,069	0,085	0,110	0,154	0,161	0,168	0,175	0,183	0,192	0,201	0,212	0,223	0,235	0,248	pb
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{4}$	–	0,057	0,070	0,091	0,129	0,134	0,140	0,147	0,154	0,162	0,170	0,179	0,189	0,200	0,212	pb
Lực ngang V_{y_z}																
$x = -\frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	0,125	0,125	0,125	0,125	0,122	0,121	0,119	0,118	0,116	0,114	0,112	0,109	0,105	0,100	0,095	pb
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,250	0,250	0,249	0,246	0,232	0,229	0,226	0,222	0,217	0,212	0,205	0,198	0,190	0,180	0,169	pb
$x = \frac{a}{10}; y = \frac{b}{2}$	0,300	0,299	0,297	0,292	0,267	0,263	0,258	0,252	0,246	0,238	0,230	0,221	0,211	0,199	0,186	pb
$x = \frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	–	0,367	0,358	0,337	0,290	0,283	0,275	0,268	0,259	0,249	0,239	0,227	0,215	0,202	0,187	pb

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$															Thừa số phụ
	∞	5	4	3	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1	
Phản lực gối tựa Q_x																
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	-	0,009	0,014	0,024	0,052	0,057	0,062	0,068	0,075	0,082	0,090	0,099	0,108	0,119	0,129	pa
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{4}$	-	0,007	0,010	0,028	0,030	0,043	0,047	0,051	0,056	0,062	0,068	0,075	0,083	0,092	0,101	pa
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	-	0,093	0,114	0,146	0,200	0,018	0,216	0,224	0,233	0,243	0,253	0,264	0,275	0,286	0,297	pa
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	-	0,077	0,095	0,121	0,169	0,175	0,182	0,190	0,198	0,207	0,216	0,226	0,236	0,247	0,259	pa
Phản lực gối tựa Q_y																
$x = -\frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	0,125	0,125	0,125	0,126	0,127	0,128	0,128	0,128	0,128	0,127	0,127	0,126	0,124	0,122	0,117	pb
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,250	0,25	0,251	0,253	0,253	0,252	0,251	0,250	0,247	0,255	0,241	0,236	0,230	0,222	0,213	pb
$x = \frac{a}{10}; y = \frac{b}{2}$	0,300	0,301	0,302	0,305	0,298	0,296	0,293	0,290	0,286	0,282	0,276	0,269	0,260	0,250	0,237	pb
$x = \frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	0,375	0,380	0,378	0,370	0,341	0,335	0,329	0,322	0,314	0,306	0,296	0,284	0,272	0,259	0,243	pb
Phản lực gối tựa Q_0																
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0	-0,002	-0,001	-0,007	-0,014	-0,015	-0,017	-0,018	-0,020	-0,021	-0,023	-0,025	-0,026	-0,027	-0,028	pab
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	-	-0,018	-0,021	-0,027	-0,035	-0,036	-0,037	-0,038	-0,039	-0,040	-0,041	-0,042	-0,042	-0,042	-0,042	pab

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{b}{a}$															Thừa số phụ
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	3	4	5	∞	
 <p>Trường hợp 8: Tấm tựa tự do tại các cạnh, chịu tải trọng phân bố hình tam giác $\mu = 0,25$ $a > b$</p>																
Độ võng w ở các điểm																
$x = -\frac{a}{4}; y = 0$	0,0147	0,0179	0,0209	0,0238	0,0265	0,0290	0,0313	0,0333	0,0352	0,0369	0,0384	0,0468	0,0491	0,0497	0,0499	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = 0; y = 0$	0,0228	0,0273	0,0317	0,0359	0,0397	0,0434	0,0467	0,0497	0,0523	0,0548	0,0569	0,0688	0,0721	0,0729	0,0732	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = \frac{a}{10}; y = 0$	0,0227	0,0272	0,0314	0,0354	0,0392	0,0426	0,0458	0,0486	0,0512	0,0535	0,0555	0,0667	0,0700	0,0708	0,0710	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = \frac{a}{4}; y = 0$	0,0182	0,0219	0,0248	0,0279	0,0307	0,0333	0,0357	0,0377	0,0397	0,0414	0,0429	0,0513	0,0537	0,0543	0,0545	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_y																
$x = -\frac{a}{4}; y = 0$	0,0126	0,0150	0,0173	0,0195	0,0216	0,0235	0,0251	0,0268	0,0282	0,0295	0,0306	0,0368	0,0385	0,0389	0,0391	pa^2
$x = 0; y = 0$	0,0230	0,0267	0,0304	0,0338	0,0369	0,0399	0,0424	0,0448	0,0469	0,0487	0,0504	0,0593	0,0617	0,0623	0,0625	pa^2
$x = \frac{a}{10}; y = 0$	0,0255	0,0293	0,0330	0,0364	0,0394	0,0422	0,0448	0,0470	0,0490	0,0508	0,0524	0,0609	0,0632	0,0638	0,0640	pa^2
$x = \frac{a}{4}; y = 0$	0,0252	0,0283	0,0311	0,0338	0,0362	0,0383	0,0403	0,0419	0,0435	0,0448	0,0460	0,0524	0,0541	0,0545	0,0547	pa^2

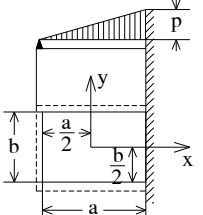
Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$															Thừa số phụ
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	3	4	5	∞	
Mô men uốn M_x																
$x = -\frac{a}{4}; y = 0$	0,0144	0,0149	0,0151	0,0151	0,0150	0,0148	0,0146	0,0143	0,0140	0,0137	0,0133	0,110	0,0101	0,0099	0,0098	pa ²
$x = 0; y = 0$	0,0260	0,0236	0,0237	0,0237	0,0236	0,0231	0,0227	0,0222	0,0218	0,0212	0,0207	0,0172	0,0161	0,0157	0,0156	pa ²
$x = \frac{a}{10}; y = 0$	0,0235	0,0239	0,0240	0,0239	0,0236	0,0232	0,0228	0,0224	0,0219	0,0214	0,0209	0,0177	0,0165	0,0161	0,0160	pa ²
$x = \frac{a}{4}; y = 0$	0,0196	0,0198	0,0199	0,0197	0,0194	0,0192	0,0188	0,0185	0,0181	0,0177	0,0174	0,0149	0,0140	0,0138	0,0137	pa ²
Lực ngang V_{x_z}																
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,090	0,100	0,109	0,117	0,124	0,130	0,135	0,139	0,143	0,146	0,149	0,163	0,166	0,167	0,167	pa
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{4}$	0,069	0,077	0,085	0,091	0,098	0,103	0,109	0,113	0,117	0,121	0,125	0,148	0,158	0,163	0,367	pa
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,248	0,260	0,271	0,280	0,288	0,294	0,300	0,305	0,309	0,313	0,316	0,330	0,332	0,333	0,333	pa
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{4}$	0,212	0,224	0,235	0,244	0,253	0,260	0,267	0,273	0,278	0,283	0,287	0,313	0,324	0,329	0,333	pa
Lực ngang V_{y_z}																
$x = -\frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	0,095	0,089	0,083	0,078	0,073	0,069	0,065	0,062	0,058	0,055	0,053	0,035	0,027	0,021	—	pb
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,169	0,157	0,147	0,137	0,129	0,121	0,114	0,108	0,102	0,097	0,092	0,062	0,046	0,037	—	pb
$x = \frac{a}{10}; y = \frac{b}{2}$	0,186	0,173	0,161	0,151	0,141	0,133	0,125	0,118	0,112	0,106	0,101	0,067	0,051	0,040	—	pb
$x = \frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	0,187	0,173	0,160	0,149	0,139	0,131	0,123	0,116	0,110	0,104	0,099	0,066	0,050	0,040	—	pb

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{b}{a}$															Thừa số phụ
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	3	4	5	∞	
Phản lực gối tựa Q_x																
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,129	0,138	0,146	0,152	0,157	0,161	0,164	0,166	0,167	0,169	0,169	0,169	0,168	0,167	0,167	pa
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{4}$	0,101	0,110	0,117	0,123	0,128	0,134	0,138	0,142	0,145	0,148	0,150	0,164	0,168	0,169	0,167	pa
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,297	0,307	0,315	0,321	0,325	0,329	0,332	0,334	0,335	0,336	0,337	0,336	0,334	0,334	0,333	pa
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{4}$	0,259	0,270	0,280	0,287	0,294	0,299	0,304	0,308	0,312	0,315	0,318	0,332	0,335	0,335	0,333	pa
Phản lực gối tựa Q_y																
$x = -\frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	0,117	0,112	0,107	0,102	0,097	0,092	0,087	0,083	0,079	0,075	0,072	0,049	0,036	0,029	–	pb
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0,213	0,202	0,192	0,181	0,172	0,163	0,154	0,146	0,139	0,132	0,126	0,085	0,064	0,051	–	pb
$x = \frac{a}{10}; y = \frac{b}{2}$	0,237	0,224	0,212	0,200	0,188	0,178	0,169	0,160	0,152	0,144	0,138	0,093	0,070	0,056	–	pb
$x = \frac{a}{4}; y = \frac{b}{2}$	2,243	0,227	0,213	0,200	0,188	0,177	0,167	0,158	0,150	0,142	0,136	0,091	0,068	0,055	–	pb
Phản lực gối tựa Q_0																
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	-0,028	-0,028	-0,028	-0,027	-0,027	-0,026	-0,025	-0,124	-0,023	-0,023	-0,022	-0,016	-0,012	-0,009	–	pab
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	-0,042	-0,040	-0,040	-0,039	-0,037	-0,036	-0,034	-0,032	-0,031	-0,030	-0,028	-0,019	-0,015	-0,012	–	pab

Bảng 2.6.1 (tiếp)

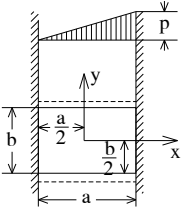
	<p>Trường hợp 9: Tấm ngàm ở 1 cạnh và tựa tự do ở 3 cạnh khác, chịu tải trọng phân bố hình tam giác $\mu = 0,25$</p>								
	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$				Thừa số phụ	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$			Thừa số phụ
Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	0	1:2	1:1,5	1		1,5	2	∞	
Độ võng w tại điểm $x = 0; y = 0$	0,026	0,026	0,022	0,014	$\frac{pa^4}{Eh^3}$	0,034	0,050	0,073	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_y $x = 0; y = 0$	0,029	0,029	0,025	0,018	$\frac{pa^4}{Eh^3}$	0,027	0,021	0,016	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	-0,067	-0,063	-0,061	-0,048	$\frac{pa^4}{Eh^3}$	-0,071	-0,084	-0,125	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_x $x = 0; y = 0$	0,007	0,010	0,012	0,015	$\frac{pa^4}{Eh^3}$	0,033	0,045	0,062	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
Lực ngang V_{xz} $x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,100	0,100	0,095	0,076	pa	0,048	0,030	0	pa
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,400	0,408	0,400	0,381	pa	0,329	0,277	-	pa

* Muốn có mô men gối tựa $M_x (x = \frac{a}{2}; y = 0)$ cần phải nhân các số $M_x (x = 0; y = 0)$, với μ

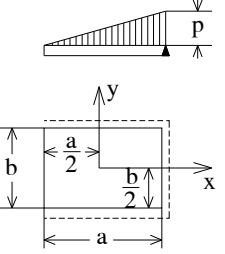
Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$				Thừa số phụ	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$			Thừa số phụ
	0	1:2	1:1,5	1		1,5	2	∞	
Lực ngang V_{y_z}									
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0	0,068	0,091	0,136	pb	0,190	0,221	0,250	pb
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0	- 0,128	- 0,170	- 0,245	pb	- 0,321	- 0,365	- 0,500	pb
Phản lực gối tựa Q_x									
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,100	0,105	0,111	0,104	pa	0,075	0,050	0	pa
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,400	0,408	0,400	0,381	pa	0,329	0,277	-	pa
Phản lực gối tựa Q_y									
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0	0,093	0,119	0,174	pb	0,233	0,246	0,250	pb
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0	- 0,224	- 0,298	- 0,429	pb	- 0,562	- 0,639	- 0,875	pb
Phản lực gối tựa Q_0									
$x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	-	- 0,012	- 0,016	- 0,020	pab	- 0,019	- 0,014	-	pab

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm a/b				Thừa số phụ	Tỷ số các cạnh của tấm a/b			Thừa số phụ
	0	1:2	1:1,5	1		1,5	2	∞	
 <p style="text-align: center;">Trường hợp 10: Tấm có 2 cạnh ngàm và 2 cạnh tựa tự do, chịu tải trọng phân bố hình tam giác $\mu = 0,25$</p>									
Mô men uốn M_y $x = 0; y = 0$	0,0208	0,0210	0,0201	- 0,0162	pa^2	0,0218	0,0217	0,0156	pb^2
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	- 0,0333	- 0,0296	- 0,0331	0,0268	pa^2	- 0,0326	- 0,0354	0	pb^2
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	- 0,0500	- 0,0546	- 0,0498	- 0,0431	pa^2	- 0,0686	- 0,0837	- 0,0152	pb^2
Mô men uốn M_x^* $x = 0; y = 0$	0,0052	0,0061	0,0076	0,0115	pa^2	0,0285	0,0428	0,0625	pb^2
Lực ngang V_{xz} $x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,150	0,146	0,162	0,157	pa	0,122	0,0089	-	pa
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,350	0,366	0,362	0,359	pa	0,322	0,271	-	pa
Lực ngang V_{yz} $x = -\frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0	- 0,047	- 0,068	- 0,100	pb	- 0,124	- 0,119	0	pb
$x = 0; y = \frac{b}{2}$	0	0,060	0,080	0,122	pb	0,180	0,210	0,250	pb
$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}$	0	- 0,117	- 0,151	- 0,226	pb	- 0,313	- 0,362	- 0,500	pb

Bảng 2.6.1 (tiếp)

Đại lượng tính và tọa độ của điểm tính	Tỷ số các cạnh của tấm $\frac{a}{b}$						Thừa số phụ
	1:2	1:1,5	1	1,5	2	∞	
 <p>Trường hợp 11: Tấm có 3 cạnh tựa tự do, chịu tải trọng phân bố hình tam giác $\mu = 0,25$</p>							
Độ võng w ở các điểm							
$x = 0; y = 0$	0,0147	0,0229	0,0352	0,0501	0,0622	0,0732	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,0246	0,0328	0,0400	0,0379	0,0319	0	$\frac{pb^4}{Eh^3}$
Mô men uốn M_x							
$x = 0; y = 0$	0,0139	0,0213	0,0324	0,0448	0,0526	0,0625	pb^2
$x = -\frac{a}{2}; y = 0$	0,0193	0,0262	0,0325	0,0308	0,0259	0	pb^2
Mô men uốn M_y							
$x = 0; y = 0$	0,0115	0,0151	0,0202	0,0211	0,0197	0,0156	pb^2

Bảng 2.5.7: Tung độ các biểu đồ bao mômen uốn, lực cắt và phản lực trong dầm liên tục có độ dài nhịp như nhau, chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều

$$M_{\max} = M_g + M_{P \max};$$

$$M_{\min} = M_g + M_{P \min};$$

$$Q_{\max} = Q_g + Q_{P \max};$$

$$Q_{\min} = Q_g + Q_{P \min}$$

x/l	Mômen uốn			x/l	Lực cắt		
	M_g	M_P			Q_g	Q_P	
		max (+)	min (-)			max (+)	min (-)
1. Dầm hai nhịp							
0,0	0	0	0	0	+0,375	0,4375	0,0625
0,1	+0,0325	0,0387	0,0062	0,1	+0,275	0,3437	0,0687
0,2	+0,0550	0,0675	0,0125	0,2	+0,175	0,2624	0,0874
0,3	+0,0675	0,0862	0,0187	0,3	+0,075	0,1932	0,1182
0,4	+0,0700	0,0950	0,0250	0,4	-0,025	0,1359	0,1609
0,5	+0,0625	0,0937	0,0312	0,5	-0,125	0,0898	0,2148
0,6	+0,0450	0,0825	0,0375	0,6	-0,225	0,0544	0,2794
0,7	+0,0175	0,0612	0,0437	0,7	-0,325	0,0287	0,3537
0,8	-0,0200	0,0300	0,0500	0,8	-0,425	0,0119	0,4369
0,85	-0,0425	0,0152	0,0577	0,9	-0,525	0,0027	0,5277
0,9	-0,0675	0,0064	0,0736	1,0	-0,625	0	0,6250
0,95	-0,0950	0,0014	0,0964	Số nhân	$g\ell$	$p\ell$	$p\ell$
1,00	-0,1250	0	0,1250				
Số nhân	$g\ell^2$	$p\ell^2$	$p\ell^2$	Phản lực: $A_{\max} = 0,3750 g\ell + 0,4375 p\ell$ $B_{\max} = 1,25 (g + p)\ell$			

Bảng 2.5.7 (tiếp)

x/l	Mômen uốn			x/l	Lực cắt		
	M_g	M_p			Q_g	Q_p	
		max (+)	min (-)			max (+)	min (-)
2. Dầm ba nhịp							
0,1	+0,035	0,040	0,005	0	0,4	0,4500	0,0500
0,2	+0,060	0,070	0,010	0,1	0,3	0,3560	0,0563
0,3	+0,075	0,090	0,015	0,2	0,2	0,2752	0,0752
0,4	+0,080	0,100	0,020	0,3	+0,1	0,2065	0,1065
0,5	+0,075	0,100	0,025	0,4	0	0,1496	0,1496
0,6	+0,060	0,090	0,030	0,5	-0,1	0,1042	0,2042
0,7	+0,035	0,070	0,035	0,6	-0,2	0,0694	0,2694
0,8	0	0,0402	0,0402	0,7	-0,3	0,0443	0,3443
0,85	-0,0212	0,0277	0,0490	0,8	-0,4	0,0280	0,4280
0,9	-0,0450	0,0204	0,0654	0,9	-0,5	0,0193	0,5191
0,95	-0,0712	0,0171	0,0883	1,0	-0,6	0,0167	0,6167
1,00	-0,1000	0,0167	0,1167	1,0	+0,5	0,5833	0,0833
1,05	-0,0762	0,0141	0,0903	1,1	+0,4	0,4870	0,0870
1,1	-0,0550	0,0151	0,0701	1,2	+0,3	0,3991	0,0991
1,15	-0,0362	0,0205	0,0568	1,3	+0,2	0,3210	0,1210
1,2	-0,0200	0,030	0,050	1,4	+0,1	0,2537	0,1537
1,3	+0,005	0,055	0,050	1,5	0,0	0,1979	0,1979
1,4	+0,020	0,070	0,050	Số nhân	$g\ell$	$p\ell$	$p\ell$
1,5	+0,025	0,075	0,050				
Số nhân	$g\ell^2$	$p\ell^2$	$p\ell^2$	Phản lực: $A_{\max} = 0,40 g\ell + 0,45 p\ell$ $B_{\max} = 1,1 g\ell + 1,2 p\ell$			

Bảng 2.5.7 (tiếp)

x/l	Mômen uốn			x/l	Lực cắt		
	M_g	M_p			Q_g	Q_p	
		max (+)	min (-)			max (+)	min (-)
3. Dầm bốn nhịp							
0,1	+0,0343	0,0396	0,0054	0,0	+0,3929	0,4464	0,0535
0,2	+0,0586	0,0693	0,0107	0,1	+0,2929	0,3528	0,0599
0,3	+0,0729	0,0889	0,0161	0,2	+0,1929	0,2717	0,0788
0,4	+0,0711	0,0986	0,0214	0,3	+0,0929	0,2029	0,1101
0,5	+0,0714	0,0982	0,0268	0,4	-0,0071	0,1461	0,1533
0,6	+0,0557	0,0879	0,0321	0,5	-0,1071	0,1007	0,2079
0,7	+0,0300	0,0675	0,0375	0,6	-0,2071	0,0660	0,2731
0,8	-0,0057	0,0374	0,0431	0,7	-0,3071	0,0410	0,3481
0,85	-0,0273	0,0248	0,0522	0,8	-0,4071	0,0247	0,4319
0,9	-0,0514	0,0163	0,0677	0,9	-0,5071	0,0160	0,5231
0,95	-0,0780	0,0139	0,0920	1,0	-0,6071	0,0134	0,6205
1,0	-0,1071	0,0134	0,1205	1,0	+0,5357	0,6027	0,0670
1,05	-0,0816	0,0116	0,0932	1,1	+0,4357	0,5064	0,0707
1,1	-0,0586	0,0145	0,0721	1,2	+0,3357	0,4187	0,0830
1,15	-0,0380	0,0198	0,0578	1,3	+0,2357	0,3410	0,1153
1,2	-0,0200	0,0300	0,0500	1,4	+0,1357	0,2742	0,1385
1,3	+0,0086	0,0568	0,0482	1,5	+0,0357	0,2190	0,1833
1,4	+0,0271	0,0736	0,0461	1,6	-0,0643	0,1755	0,2398
1,5	+0,0357	0,0804	0,0446	1,7	-0,1643	0,1435	0,3078
1,6	+0,0343	0,0771	0,0429	1,8	-0,2643	0,1222	0,3865
1,7	+0,0229	0,0639	0,0411	1,9	-0,3643	0,1106	0,4749
1,8	+0,0014	0,0417	0,0403	2,0	-0,4643	0,1074	0,5714
1,85	-0,0130	0,0345	0,0475	Số nhân	gl	pl	pl
1,9	-0,0300	0,0310	0,0610	Phản lực:			
1,95	-0,495	0,0317	0,0812	$A_{\max} = 0,3929 gl + 0,4464 pl$			
2,0	-0,0714	0,0357	0,1071	$B_{\max} = 1,428 gl + 1,2232 pl$			
Số nhân	gl^2	pl^2	pl^2	$C = 0,9286 gl + 1,428 pl$			

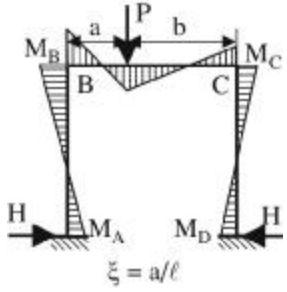
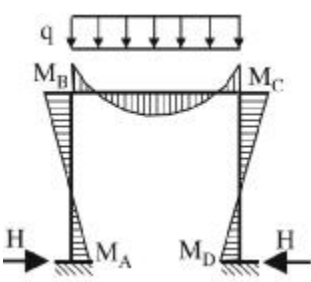
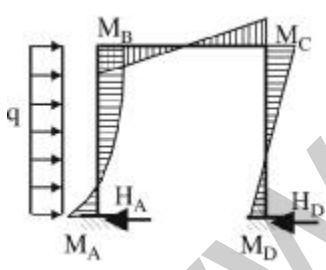
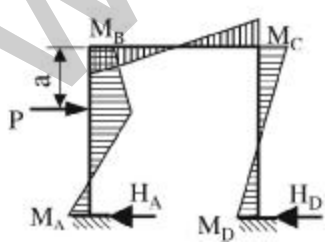
Bảng 2.5.7 (tiếp)

x/l	Mômen uốn			x/l	Lực cắt		
	M _g	M _p			Q _g	Q _p	
		max (+)	min (-)			max (+)	min (-)
4. Dầm năm nhịp							
0,1	+0,0345	0,0397	0,0053	0,0	+0,3947	0,4474	0,0526
0,2	+0,0589	0,0695	0,0105	0,1	+0,2947	0,3537	0,0590
0,3	+0,0734	0,0892	0,0158	0,2	+0,1947	0,2726	0,0779
0,4	+0,0779	0,0989	0,0211	0,3	+0,0947	0,2039	0,1091
0,5	+0,0724	0,0987	0,0263	0,4	-0,0053	0,1471	0,1524
0,6	+0,0568	0,0884	0,0316	0,5	-0,1053	0,1071	0,2069
0,7	+0,0313	0,0682	0,0368	0,6	-0,2053	0,0669	0,2722
0,8	-0,0042	0,0381	0,0423	0,7	-0,3053	0,0419	0,3472
0,9	-0,0497	0,0183	0,0680	0,8	-0,4053	0,0257	0,4309
1,0	-0,1053	0,0144	0,1196	0,9	-0,5053	0,0169	0,5222
1,1	-0,0576	0,0140	0,0717	1,0	-0,6053	0,1044	0,6196
1,2	-0,0200	0,0300	0,0500	1,0	+0,5263	0,5981	0,0718
1,3	+0,0073	0,0563	0,0487	1,1	+0,4263	0,5048	0,0755
1,4	+0,0253	0,0726	0,0474	1,2	+0,3263	0,4141	0,0878
1,5	+0,0329	0,0789	0,0464	1,3	+0,2263	0,3364	0,1101
1,6	+0,0305	0,0753	0,0447	1,4	+0,1263	0,2697	0,1434
1,7	+0,0182	0,0616	0,0434	1,5	+0,0263	0,2164	0,1882
1,8	-0,0042	0,0389	0,0432	1,6	-0,0737	0,1711	0,2448
1,9	-0,0366	0,0280	0,0646	1,7	-0,1737	0,1391	0,3128
2,0	-0,0799	0,0323	0,1112	1,8	-0,2737	0,1179	0,3916
2,1	-0,0399	0,0293	0,0633	1,9	-0,3737	0,1063	0,4800
2,2	+0,0011	0,0416	0,0405	2,0	-0,4737	0,1029	0,5766
2,3	+0,0261	0,0655	0,0395	2,0	+0,5000	0,5907	0,0909
2,4	+0,0411	0,0805	0,0395	2,1	+0,4000	0,4944	0,0944
2,5	+0,0461	0,0855	0,0395	2,2	+0,3000	0,4063	0,1063
Số nhân	$g\ell^2$	$p\ell^2$	$p\ell^2$	2,3	+0,2000	0,3279	0,1279
Phản lực:				2,4	+0,1000	0,2604	0,1604
$M_{\max} = 0,3947 g\ell + 0,4474 p\ell$				2,5	0	0,2045	0,2045
$B_{\max} = 1,1316 g\ell + 1,2177 p\ell$				Số nhân	$g\ell$	$p\ell$	$p\ell$
$C_{\max} = 0,9737 g\ell + 1,1675 p\ell$							

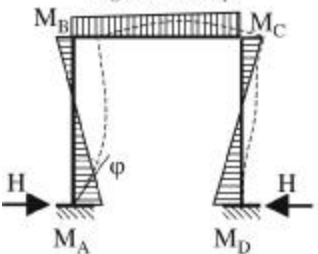
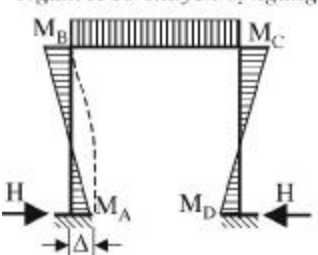
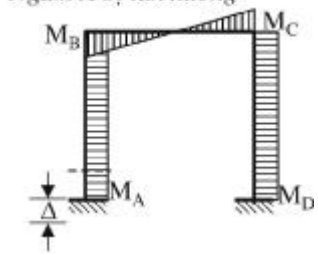
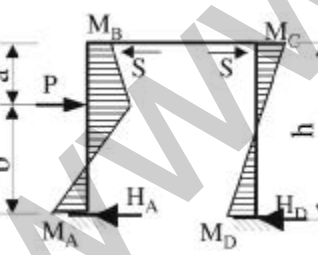
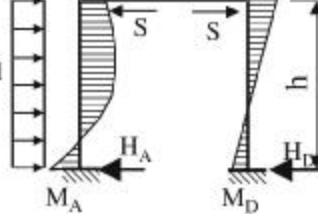
Bảng 2.5.8: Mô men uốn và phản lực trong một số kết cấu

Sơ đồ tải trọng và biểu đồ mô men uốn	Các mô men uốn và phản lực
1	2
1. Khung một nhịp có các cột liên kết tựa khớp cố định	
<p>The diagrams show a portal frame with fixed supports at A and D, and joints at B and C. The height of the columns is h, and the span is l. The frame is subjected to different loading conditions: <ul style="list-style-type: none"> Top diagram: Point load P at the top joint B, with distances a and b from the ends of the beam. Internal moments are labeled \$M_B\$ and \$M_C\$ at the joints, and \$J_1\$ and \$J_2\$ along the columns and beam. Middle diagram: Uniformly distributed load q acting downwards on the beam. Bottom-left diagram: Horizontal load q acting on the left side of the frame. Bottom-right diagram: Horizontal load P acting on the left side of the frame at a height a from the base, with \$\xi = a/h\$. </p>	$k = \frac{J_2 h}{J_1 l}$ $M_B = M_C = \frac{3}{2} \frac{Pab}{l(3+2k)}$ $H = \frac{3}{2} \frac{Pab}{hl(3+2k)}$ $M_B = M_C = \frac{q l^2}{4(3+2k)}$ $H = \frac{q l^2}{4h(3+2k)}$ $M_B = \frac{6+3k}{3+2k} \frac{q h^2}{8} ; \quad M_C = \frac{6+5k}{3+2k} \frac{q h^2}{8}$ $H_D = \frac{6+5k}{3+2k} \frac{q h}{8} \quad ; \quad H_A = qh - H_D$ $M_B = \frac{1-\xi}{2} \frac{3+2k-k\xi(2-\xi)}{3+2k} Ph$ $M_C = \frac{1-\xi}{2} \frac{3+2k+k\xi(2-\xi)}{3+2k} Ph$ $H_D = \frac{1-\xi}{2} \frac{3+2k+k\xi(2-\xi)}{3+2k} P$ $H_A = P - H_D$

Bảng 2.5.8 (tiếp)

1	2
2. Khung một nhịp có các cột liên kết ngầm	
 <p style="text-align: center;">$\xi = a/l$</p>	$M_{B,C} = \left(\frac{2}{2+k} \pm \frac{1-2\xi}{1+6k} \right) \frac{Pab}{2l} \quad (+ \text{ với } M_B; - \text{ với } M_C)$ $M_{A,D} = \left(\frac{1}{2+k} \mp \frac{1-2\xi}{1+6k} \right) \frac{Pab}{2l} \quad (- \text{ với } M_A; + \text{ với } M_D)$ $H = \frac{3}{2+k} \frac{Pab}{2hl}$ $K = \frac{J_2 h}{J_1 l}$
	$M_B = M_C = \frac{1}{2+k} \frac{ql^2}{6}$ $M_A = M_D = -\frac{1}{2+k} \frac{ql^2}{12}$ $H = \frac{3}{2+k} \frac{ql^2}{12h}$
	$M_{B,C} = k \left(\frac{12}{1+6k} \mp \frac{1}{2+k} \right) \frac{qh^2}{24} \quad (- \text{ với } M_B; + \text{ với } M_C)$ $M_A = \left(\frac{5+18k}{1+6k} + \frac{1}{2+k} + 2 \right) \frac{qh^2}{24}$ $M_D = \left(\frac{5+18k}{1+6k} - \frac{1}{2+k} \right) \frac{qh^2}{24}$ $H_D = \frac{17+18k}{1+6k} \frac{qh}{24}$ $H_A = qh - H_D$
 <p style="text-align: center;">$\xi = a/h$</p>	$M_{B,C} = \frac{k(1-\xi)^2}{2} \left(\frac{3}{1+6k} \mp \frac{\xi}{2+k} \right) Ph$ $M_A = \left[(1-\xi) - \frac{(1-\xi)^2}{2} \left(\frac{2+k+\xi+\xi k}{2+k} + \frac{3k}{1+6k} \right) \right] Ph$ $M_D = \frac{(1-\xi)^2}{2} \left(\frac{2+k+\xi+\xi k}{2+k} - \frac{3k}{1+6k} \right) Ph$ $H_D = \frac{(1-\xi)^2}{2} \frac{2+k+\xi+2\xi k}{2+k} P$

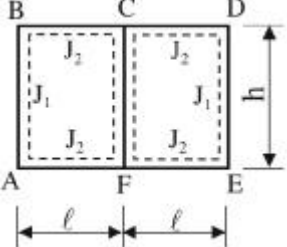
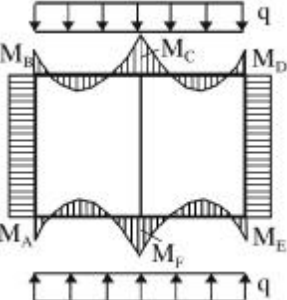
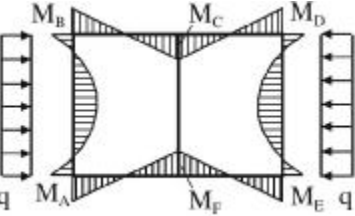
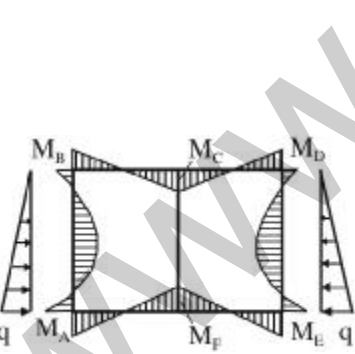
Bảng 2.5.8 (tiếp)

1	2
<p style="text-align: center;">Ngàm A xoay</p> 	$M_{B,C} = Ei_1 k \left(\frac{1}{2+k} \mp \frac{3}{1+6k} \right) \varphi \quad (- \text{ với } M_B; + \text{ với } M_C)$ $M_{A,D} = Ei_1 \left(\frac{3+2k}{2+k} \pm \frac{3k}{1+6k} \right) \varphi \quad (+ \text{ với } M_A; - \text{ với } M_D)$ $H = \frac{3Ei_1}{h} \frac{1+k}{2+k} \varphi$
<p style="text-align: center;">Ngàm A có chuyển vị ngang</p> 	$M_B = M_C = \frac{3EJ_1}{h^2} \frac{k}{2+k} \Delta$ $M_A = M_D = \frac{3EJ_1}{h^2} \frac{1+k}{2+k} \Delta$ $H = \frac{3EJ_1}{h^3} \frac{1+2k}{2+k} \Delta$
<p style="text-align: center;">Ngàm A bị lún xuống</p> 	$M_B = M_C = \frac{6EJ_1}{\ell^2} \frac{k}{1+6k} \Delta$ $M_A = M_D = M_B$ $H = 0$
3. Khung một nhịp có thanh dầm cứng tuyệt đối liên kết cứng với cột	
	$S = P \frac{(3a+b)b^2}{2h^3}; \quad H_D = S; \quad H_A = P - S$ $M_D = M_C = P \frac{(3a+b)b^2}{4h^2};$ $M_B = P \frac{(b-a)b^2}{4h^2}$ $M_A = Pb - Sh - M_B$
	$S = \frac{1}{4} qh; \quad H_A = \frac{3}{4} qh; \quad H_D = \frac{1}{4} qh$ $M_C = M_D = \frac{qh^2}{8}; \quad M_B = \frac{qh^2}{24}; \quad M_A = \frac{5qh^2}{24}$

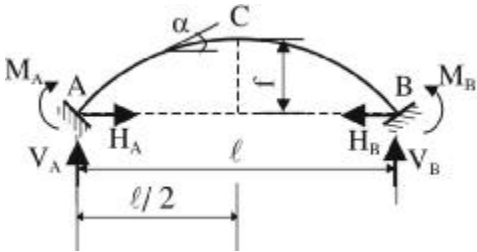
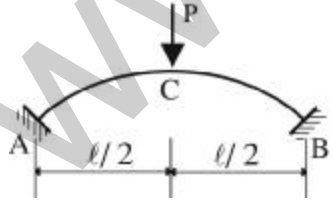
Bảng 2.5.8 (tiếp)

4. Khung một nhịp khép kín	
	$i_1 = \frac{J_1}{h}; \quad i_2 = \frac{J_2}{l}; \quad k = \frac{i_2}{i_1}$
	<p>Các tiết diện 1, 2, 3, 4 ở giữa các thanh; Đường nét đứt chỉ phía mômen có dấu dương.</p>
	$M_A = M_D = -\frac{Pl}{24} \frac{k+6}{(k+3)(k+1)}$ $M_B = M_C = -\frac{Pl}{24} \frac{4k+9}{(k+3)(k+1)}$ $M_1 = \frac{Pl}{24} \frac{6k^2+20k+9}{(k+3)(k+1)}$ $M_2 = \frac{Pl}{24} \frac{3k^2+11k+3}{(k+3)(k+1)}$
	$M_A = M_B = M_C = M_D = -\frac{q\ell^2}{12} \frac{1}{k+1}$ $M_1 = M_2 = \frac{q\ell^2}{24} \frac{3k+1}{k+1}$
	$M_A = M_B = M_C = M_D = -\frac{qh^2}{12} \frac{k}{k+1}$ $M_3 = M_4 = \frac{qh^2}{12} \frac{2k+3}{k+1}$
	$M_A = M_D = -\frac{qh^2 k(3k+8)}{60(k^2+4k+3)}$ $M_B = M_C = -\frac{qh^2 k(2k+7)}{60(k^2+4k+3)}$ $M_3 = M_4 = \frac{qh^2(k+3)}{48(k+1)}$

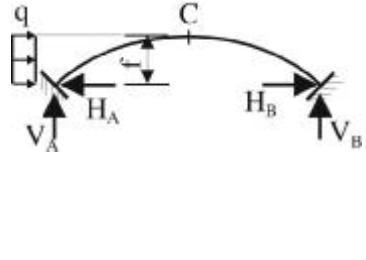
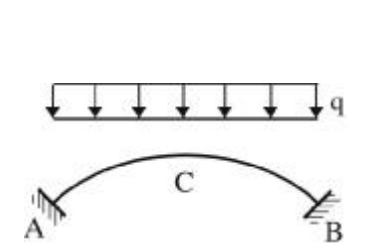
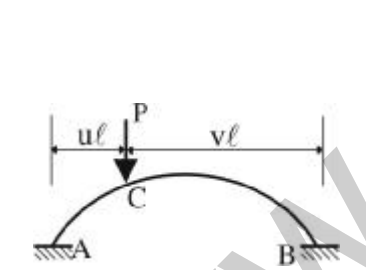
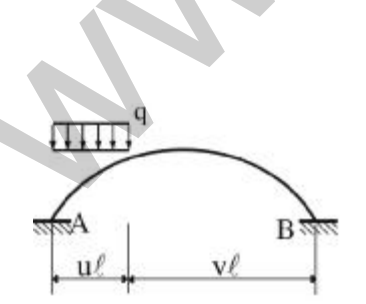
Bảng 2.5.8 (tiếp)

1	2
5. Khung hai nhịp khép kín	
	$i_1 = \frac{J_1}{h}; \quad i_2 = \frac{J_2}{l}; \quad k = \frac{i_2}{i_1}$ <p>Đường nét đứt chỉ phía mômen có dấu dương.</p>
	$M_A = M_B = M_D = M_E = -\frac{q\ell^2}{12} \frac{1}{2k+1}$ $M_{CB} = M_{CD} = M_C = -\frac{q\ell^2}{12} \frac{3k+1}{2k+1}$ $M_{FA} = M_{FE} = M_F = M_C$ <p>M_{CB} – Mômen uốn tại đầu C của thanh CB</p>
	$M_A = M_B = M_D = M_E = -\frac{qh^2}{6} \frac{k}{2k+1}$ $M_{CB} = M_{CD} = M_C = M_{FA} = M_{FE} = M_F = \frac{qh^2}{12} \frac{k}{2k+1}$ $M_{CF} = M_{FC} = 0$
	$m = \frac{20(k+6)(2k+1)}{k}$ $M_B = M_D = -\frac{qh^2}{6} \frac{8k+59}{m}$ $M_A = M_E = -\frac{qh^2}{6} \frac{12k+61}{m}$ $M_C = M_{CB} = M_{CD} = \frac{qh^2}{6} \frac{7k+31}{m}$ $M_F = M_{FA} = M_{FE} = \frac{qh^2}{6} \frac{3k+29}{m}$ $M_{CF} = M_{FC} = 0$

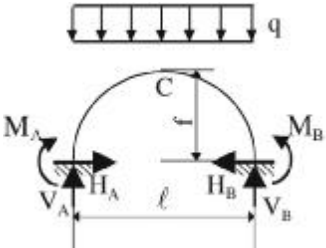
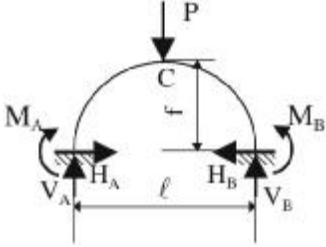
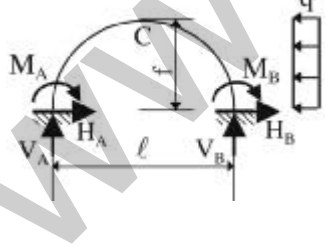
Bảng 2.5.8 (tiếp)

6. Vòm parabol bậc hai		
		
<p>Tiết diện vòm biến đổi theo qui luật:</p> $J = \frac{J_C}{\cos \alpha}$ <p>α - góc giữa đường tiếp tuyến với trục vòm và phương nằm ngang; J_C - mômen quán tính của tiết diện tại đỉnh vòm.</p> <p>Các phản lực và mômen mang dấu dương khi có chiều như ghi trên sơ đồ. Trong các công thức ở bảng dùng hệ số k khi xét cả ảnh hưởng của lực dọc:</p> $k = \frac{1}{1 + \nu}; \quad \nu = \frac{45}{4} \frac{J_C}{F_C f^2}$ <p>J_C, F_C - mômen quán tính, diện tích của tiết diện tại đỉnh vòm.</p> <p>Khi không xét ảnh hưởng của lực dọc thì $\nu = 0, k = 1$.</p>		
Sơ đồ tải trọng	Phản lực	Mômen uốn
	$V_A = V_B = \frac{P}{2}$ $H = \frac{15}{64} \frac{P\ell}{f} k$	$M_A = M_B = \frac{P\ell}{8} \left(\frac{5}{4} k - 1 \right)$ $M_C = \frac{P\ell}{8} \left(1 - \frac{5}{8} k \right)$ <p>Khi $k = 1$ có:</p> $M_A = M_B = \frac{P\ell}{2}$ $M_C = \frac{3}{64} P\ell$

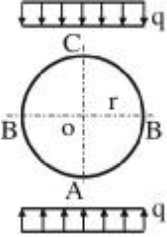
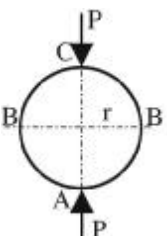

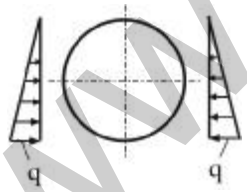
Bảng 2.5.8 (tiếp)

Sơ đồ tải trọng	Phản lực	Mômen uốn
	$V_A = -\frac{qf^2}{4l};$ $V_B = \frac{qf^2}{4l}$ $H_A = -\frac{11}{14}qf;$ $H_B = \frac{3}{14}qf$	$M_A = -\frac{51}{280}qf^2$ $M_B = \frac{19}{280}qf^2$ $M_C = -\frac{3}{140}qf^2$
	$V_A = V_B = \frac{q\ell}{2}$ $H = \frac{q\ell^2}{8f}k$ <p>Khi $k = 1$:</p> $H = \frac{q\ell^2}{8f}$	$M_A = M_B = -\frac{q\ell^2}{12}(1-k)$ $M_C = \frac{q\ell^2}{24}(1-k)$ <p>Khi $k = 1$:</p> $M_A = M_B = M_C = 0$
	$V_A = v^2(1+2u)P$ $V_B = u^2(1+2v)P$ $H = \frac{15}{4}P\frac{\ell}{f}u^2v^2k$	$M_A = P\ell uv^2\left(\frac{5k}{2}u-1\right)$ $M_B = P\ell u^2v^2\left(\frac{5k}{2}v-1\right)$ <p>Khi $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ có:</p> $M_C = \frac{P\ell}{2}u^2\left(1-\frac{5k}{2}v^2\right)$
	$V_A = \frac{q\ell}{2}u \times$ $\times [1+v(1+2v)]$ $V_B = \frac{q\ell}{2}u^2(1-v^2)$ $H = \frac{q\ell^2}{8f}u^3 \times$ $\times [1+3v(1+2v)]k$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{12}u^2 \times$ $\times [6v^3k + (3v^2 + 2v + 1) \times$ $\times (1-k)]$ $M_B = \frac{q\ell^2}{12}u^3 [6v^2k - (3v + 1) \times$ $\times (1-k)]$

Bảng 2.5.8 (tiếp)

Sơ đồ tải trọng	Phản lực và mô men uốn					
7. Vòm tròn có tiết diện không đổi						
	$M_B = M_A; H_B = H_A = H; V_B = V_A$					
	f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	V_A/P	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	H_A/P	1,2609	0,6378	0,4342	0,3356	0,2758
	$M_A/P\ell$	0,00131	0,00414	0,00925	0,01649	0,02467
$M_C/P\ell$	0,00022	0,00158	0,00399	0,00726	0,01175	
	$M_B = M_A; H_B = H_A = H; V_B = V_A$					
	f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	V_A/P	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	H_A/P	2,3461	0,1677	0,7740	0,5769	0,4551
	$M_A/P\ell$	0,03249	0,03526	0,04014	0,04663	0,05326
$M_C/P\ell$	0,04789	0,05171	0,05793	0,06587	0,07570	
	$V_C = V_A = -V_B; H_B = -H_A$					
	f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	V_A/ql	0,0249	0,0485	0,0706	0,0899	0,1053
	H_A/ql	0,2141	0,2145	0,2156	0,2182	0,2235
	H_B/ql	0,7859	0,7855	0,7844	0,7818	0,7765
	$M_A/ql\ell$	0,0068	0,0145	0,0228	0,0332	0,0463
	$M_B/ql\ell$	0,0183	0,0369	0,0566	0,0769	0,0984
$M_C/ql\ell$	-0,0022	-0,0041	-0,0066	-0,0091	-0,0128	

Bảng 2.5.8 (tiếp)

9. Mômen uốn trong các vành ống tròn							
(M > 0 khi tiết diện căng thứ trong; N > 0 khi tiết diện bị nén)							
Sơ đồ tải trọng	Mômen uốn và lực dọc						
	Hệ số	m			n		
	Mặt cắt	A	B	C	A	B	C
	$M = mqr^2$			$N = nqr$			
		+0,250	-0,250	+0,250	0	1,000	0
	$M = mPr$			$N = nP$			
		0,318	-0,182	0,318	0	0,5	0
	$M = mqr^2$			$N = nqr$			
		0	0	0	-1,000	-1,000	-1,000
	$M = mqr^2$			$N = nqr$			
		-0,1458	+0,1250	-0,1042	0,6875	0	0,3125

2.5.3.3. Phương pháp chuyển vị

1. Nội dung

+ Chọn hệ cơ bản:

Đưa liên kết ngàm chống xoay vào tất cả các nút và liên kết thanh chống vào một số nút của kết cấu để tất cả các nút của kết cấu hoàn toàn không có chuyển vị nhằm biến tất cả các thanh trong hệ thành dầm một nhịp có dạng như các dầm liệt kê trong bảng 2.5.3. Để hệ cơ bản tương đương với hệ ban đầu phải thêm chuyển vị góc xoay vào các nút bị ngàm và thêm chuyển vị thẳng vào các nút đưa thêm thanh chống. Chúng là ẩn của bài toán, ký hiệu là z_1, z_2, \dots, z_n .

+ Thiết lập phương trình xác định ẩn:

Do thêm liên kết vào các nút nên dưới tác dụng của tải trọng và chuyển vị z_i ở hệ cơ bản xuất hiện phản lực liên kết tại vị trí các nút đó trong khi ở hệ đã cho không có. Để hai hệ tương đương về lực thì các phản lực liên kết này phải có giá trị bằng 0. Trường hợp kết cấu chỉ chịu tác dụng của tải trọng điều kiện này được viết ở dạng:

$$\begin{aligned} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + \dots + r_{1n}z_n + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + \dots + r_{2n}z_n + R_{2P} &= 0 \\ \dots & \\ r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + \dots + r_{nn}z_n + R_{nP} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

trong đó:

r_{ij} - phản lực tại liên kết thứ i do chuyển vị tại nút j có giá trị bằng đơn vị gây ra;

R_{ip} - phản lực liên kết tại nút i do tải trọng gây ra.

Trị của r_{ij} và R_{ip} được xác định từ điều kiện cân bằng lực tại các nút được đưa thêm liên kết. Với nguyên nhân lún không đều chỉ việc thay R_{ip} bằng $R_{i\Delta}$ là phản lực do lún gây ra.

Hệ phương trình trên được gọi là hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị.

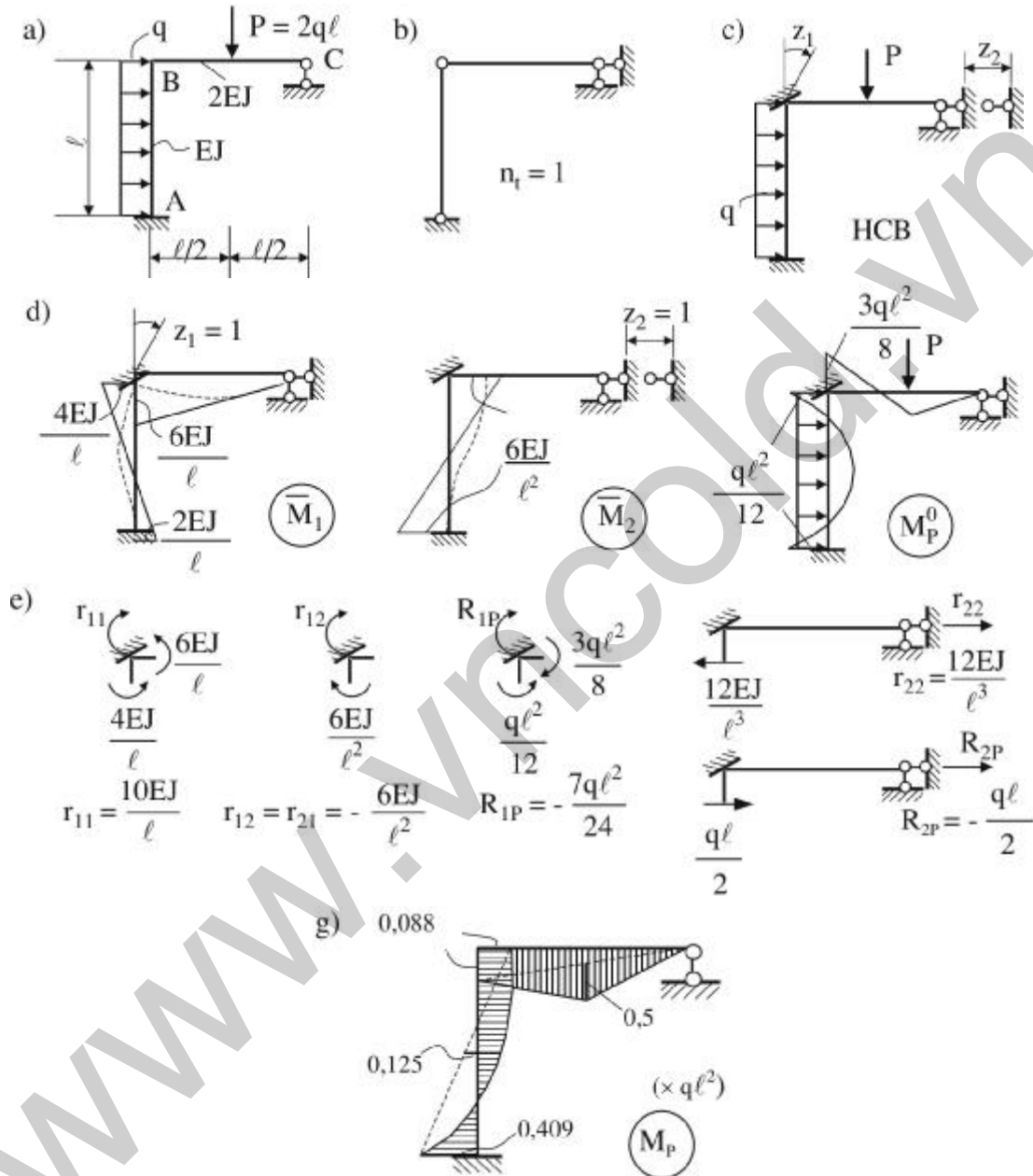
+ Giải hệ phương trình trên xác định được trị của các ẩn z_i , từ đó xác định được mô men đầu các đoạn thanh và vẽ được biểu đồ mô men cho kết cấu.

+ Các bước tiếp theo làm tương tự như phương pháp lực.

Về hiệu quả sử dụng, nói chung phương pháp chuyển vị đơn giản hơn phương pháp lực về số ẩn, lập hệ cơ bản, vẽ biểu đồ mô men đơn vị, xác định các hệ số và số hạng tự do trong phương trình chính tắc v.v... Song không lợi với những kết cấu cần xét tới ảnh hưởng của lực dọc và với kết cấu cần đưa vào nhiều liên kết để hạn chế chuyển vị thẳng.

Ví dụ:

Vẽ biểu đồ mômen uốn của khung có kích thước và chịu tải trọng như hình 2.5.14 a.



Hình 2.5.14: Hệ cơ bản và các bước tính toán theo phương pháp chuyển vị

Thực hiện các bước tính toán sau:

- Xác định số ẩn chuyển vị:

$$n = n_g + n_t = 1 + 1 = 2$$

- Lập hệ cơ bản, đặt ẩn số như hình 2.5.14 c.
- Vẽ các biểu đồ mô men đơn vị và mô men do tải trọng gây ra như ở hình 2.5.14 d.

- Lập hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + R_{2P} = 0$$

- Tra bảng biểu đồ \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , M_P^0 như hình 2.5.14 d. Xét cân bằng nút để xác định các hệ số ẩn và số hạng tự do như hình 2.5.14 e

- Giải hệ hai phương trình :

$$\frac{10EJ}{\ell}z_1 - \frac{6EJ}{\ell^2}z_2 - \frac{7}{24}q\ell^2 = 0$$

$$-\frac{6EJ}{\ell^2}z_1 + \frac{12EJ}{\ell^3}z_2 - \frac{q\ell}{2} = 0$$

$$\rightarrow z_1 = +0,077 \frac{q\ell^3}{EJ}$$

$$z_2 = +0,08 \frac{q\ell^4}{EJ}$$

- Xác định mô men tổng cộng theo công thức

$$M_P = \bar{M}_1z_1 + \bar{M}_2z_2 + M_P^0$$

và vẽ biểu đồ mômen uốn của hệ siêu tĩnh đã cho như hình 2.5.14 g.

2.6. LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

2.6.1. Giả thiết tính toán và một số khái niệm

Lý thuyết đàn hồi (LTĐH) nghiên cứu cách tính toán kết cấu có dạng bất kỳ làm việc trong giai đoạn biến dạng đàn hồi của vật liệu. Do kết cấu không có dạng thanh nên các giả thiết tiết diện phẳng, giả thiết thanh là tập hợp của các thớ dọc, chúng không kéo hoặc ép lẫn nhau dùng trong Sức bền vật liệu (SBVL) không còn đúng nữa. Vì vậy LTĐH phải sử dụng công cụ toán học phức tạp hơn so với SBVL. Mặc dù vậy, để có thể xây dựng được các phương trình và biểu thức tính toán LTĐH vẫn phải sử dụng một số giả thiết đơn giản hoá sau:

- + Vật liệu của kết cấu liên tục, đồng chất và đẳng hướng;
- + Biến dạng tỷ lệ bậc nhất với ứng suất (định luật Húc);
- + Chuyển vị do biến dạng gây ra rất nhỏ so với kích thước của kết cấu nên có thể coi kích thước của kết cấu sau biến dạng vẫn như kích thước của kết cấu trước khi bị biến dạng.

Lý thuyết đàn hồi xây dựng trên cơ sở các giả thiết nêu ở trên được gọi là *Lý thuyết đàn hồi tuyến tính*. Nếu không sử dụng giả thiết thứ hai và thứ ba ta có *Lý thuyết đàn hồi phi tuyến*. Trường hợp vật liệu không tuân theo định luật Húc ta có *bài toán phi tuyến về vật liệu*. Đất, đá, polyme là những vật liệu có tính phi tuyến rõ rệt. Trường hợp chuyển vị của kết cấu có giá trị đáng kể so với kích thước của kết cấu thì để có kết quả sát với thực tế trong tính toán phải xét đến hình dạng và kích thước thực của kết cấu khi bị biến dạng. Lúc này ta có *bài toán phi tuyến về hình học*. Các kết cấu có bề dày mỏng so với các kích thước khác là những kết cấu có chuyển vị lớn không thể bỏ qua trong tính toán ứng suất hoặc nội lực.

Ngoài các kết cấu làm bằng vật liệu đồng chất, đẳng hướng Lý thuyết đàn hồi cũng nghiên cứu ứng xử của kết cấu làm bằng *vật liệu không đồng chất, trục hướng hoặc thậm chí dị hướng*, ví dụ như kết cấu làm bằng vật liệu composit, kết cấu ống làm bằng nhiều lớp vật liệu, đập cùng làm việc với nền v.v...

Trong thực tế, đa phần các tính toán thiết kế trong thủy lợi vẫn cho phép xem ứng xử của kết cấu là đàn hồi tuyến tính. Do vậy, trong mục này chủ yếu sẽ trình bày Lý thuyết đàn hồi tuyến tính.

2.6.2. Phương trình cơ bản và phương pháp giải

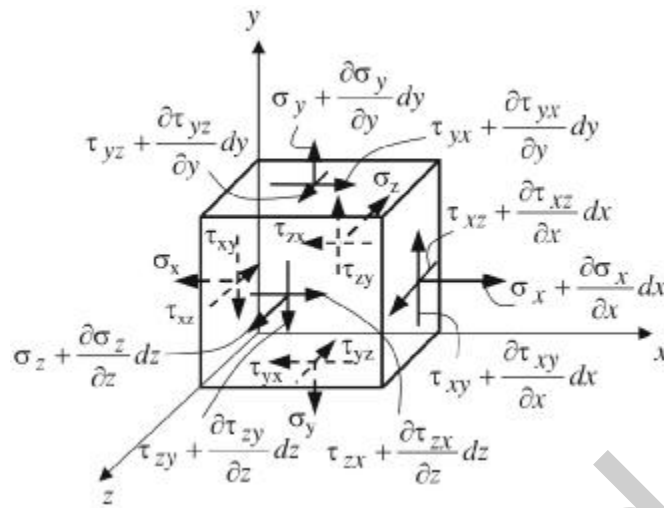
Để xác định hàm biểu diễn các thành phần ứng suất, biến dạng và chuyển vị theo phương của các trục tọa độ x, y, z bên trong kết cấu Lý thuyết đàn hồi xây dựng các phương trình biểu diễn quan hệ giữa các đại lượng này và gọi là phương trình cơ bản của lý thuyết đàn hồi.

1. Phương trình cân bằng

Phương trình cân bằng biểu diễn cân bằng lực giữa các thành phần ứng suất tác dụng trên các mặt và cường độ của lực phân bố thể tích X, Y, Z tác dụng bên trong một phân tử hình hộp có pháp tuyến của các mặt trùng với phương của các trục tọa độ x, y, z và có kích thước rất nhỏ (chiều dài cạnh là dx, dy và dz) được tách ra ở điểm bất kỳ bên trong kết cấu (hình 2.6.1). Trong lý thuyết đàn hồi phân tử hình hộp được sử dụng để đại diện cho một điểm bên trong kết cấu. Giả thiết các thành phần ứng suất có chiều dương như biểu diễn trong hình vẽ, còn X, Y, Z có chiều dương là chiều của các trục tọa độ.

Từ điều kiện cân bằng lực theo các phương $\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0$ rút ra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.6.1)$$



Hình 2.6.1: Ứng suất và lực tác dụng vào phần tử hình hộp

Trường hợp lực thể tích là lực quán tính thì giá trị của chúng được xác định bằng các công thức:

$$\begin{aligned}
 X &= -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 Y &= -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 Z &= -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.6.2}$$

trong đó ρ là khối lượng riêng của vật liệu kết cấu, còn các đạo hàm bậc 2 của các thành phần chuyển vị theo thời gian là các thành phần gia tốc chuyển động theo các phương x, y và z .

2. Phương trình hình học và điều kiện liên tục của biến dạng

Phương trình hình học biểu diễn quan hệ giữa các thành phần biến dạng của khối hình hộp có các mặt song song với các trục x, y, z được tách ra ở điểm bất kỳ bên trong kết cấu và các thành phần chuyển vị tại điểm đó.

Giả thiết chuyển vị của kết cấu rất nhỏ so với kích thước của kết cấu (giả thiết thứ ba trong mục 2.6.1) thì các thành phần biến dạng được tính từ các thành phần chuyển vị bằng công thức:

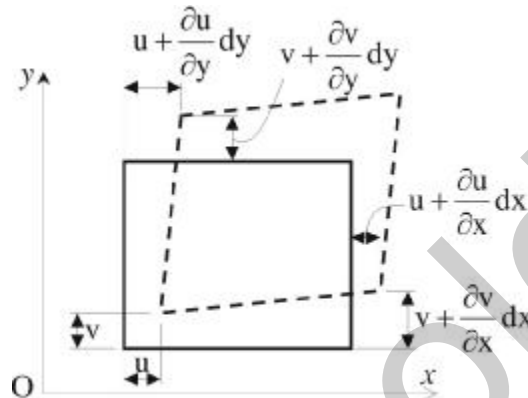
$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{2.6.3}$$

trong đó:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - biến dạng thẳng của các cạnh phân tố hình hộp song song với các trục x, y, z ;

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ - biến dạng góc ở đỉnh của các mặt xy, yz, zx của phân tố hình hộp;

u, v, w - chuyển vị dọc theo các trục x, y, z ở điểm tách khối hộp.



Hình 2.6.2: Biến dạng của mặt xy của phân tố hình hộp

3. Phương trình vật lý

Phương trình vật lý biểu diễn quan hệ giữa các thành phần biến dạng và các thành phần ứng suất ở điểm bất kỳ bên trong kết cấu. Trường hợp vật liệu kết cấu tuân theo định luật Húc như nêu trong giả thiết hai ở mục 2.6.1 thì biến dạng được tính từ ứng suất theo công thức:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\tag{2.6.4}$$

hoặc ngược lại ứng suất được tính từ biến dạng theo công thức:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
 \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}
 \end{aligned}
 \tag{2.6.5}$$

trong đó:

E - mô đun đàn hồi (mô đun Iâng) của vật liệu;

μ - hệ số biến dạng ngang (hệ số Poát-xông) của vật liệu. Cả hai hệ số này đều được xác định bằng thí nghiệm;

G - mô đun đàn hồi cắt xác định bằng thực nghiệm hoặc tính bằng công thức:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \tag{2.6.6}$$

λ - hằng số La-mê được tính bằng công thức:

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \tag{2.6.7}$$

θ - biến dạng thể tích tương đối tính bằng công thức:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{2.6.8}$$

Trường hợp kết cấu bị *biến dạng do thay đổi nhiệt độ* thì phải bổ xung vào vế phải của 3 phương trình đầu trong hệ phương trình (2.6.4) thành phần biến dạng dẫn nở hoặc co ngót do nhiệt độ $\alpha(T - T_0)$. Vì biến đổi nhiệt độ chỉ gây biến đổi thể tích (biến dạng thẳng), không gây biến đổi hình dáng của vật thể (biến dạng góc) nên 3 phương trình sau của phương trình vật lý vẫn giữ nguyên. Cụ thể là:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha(T - T_0) \\
 \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) + \alpha(T - T_0) \\
 \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha(T - T_0)
 \end{aligned}
 \tag{2.6.9}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

trong đó:

α - hệ số dẫn nở nhiệt của vật liệu kết cấu;

T - nhiệt độ tại thời điểm tính toán;

T_0 - nhiệt độ ở thời điểm ban đầu.

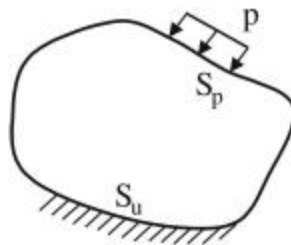
Cần nói thêm ở đây là ở điều kiện nhiệt độ cao các hằng số vật liệu E, μ , α là các hàm phụ thuộc vào nhiệt độ.

4. Phương trình liên tục

Nếu trong quá trình biến dạng bên trong kết cấu không phát sinh khe nứt thì biến dạng của kết cấu được gọi là liên tục. Lúc này các thành phần biến dạng sẽ thỏa mãn hệ 6 phương trình, được gọi là *phương trình liên tục* của biến dạng:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

5. Điều kiện biên



Hình 2.6.3: Điều kiện biên về lực và điều kiện biên về chuyển vị

Về nguyên tắc, từ 15 phương trình trong các hệ phương trình cân bằng (2.6.1), hình học (2.6.3) và vật lý (2.6.4) hoặc (2.6.5) có thể giải tìm 15 ẩn là 6 thành phần ứng suất $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, 3 thành phần chuyển vị u, v, w và 6 thành phần biến dạng $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Trường hợp biến dạng của kết cấu là liên tục thì các thành phần biến dạng phải thoả mãn phương trình liên tục (2.6.10). Song vì các phương trình trên là các phương trình vi phân nên để tìm được nghiệm riêng còn cần biết *điều kiện biên*. Đây là các ràng buộc của các ẩn trên biên. Ràng buộc về ứng suất trên biên là ứng suất ở các điểm này phải cân bằng với tải trọng tác dụng trên biên. Ràng buộc về chuyển vị trên biên là chuyển vị ở các điểm trên biên có liên kết phải bằng dịch chuyển bị hạn chế bởi liên kết tại đó.

Điều kiện biên về lực tại điểm bất kỳ trên bề mặt biên S_p chịu tác dụng của tải trọng phân bố p có phương bất kỳ (hình 2.6.2):

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ p_y &= \tau_{yx} \ell + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ p_z &= \tau_{zx} \ell + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

trong đó:

p_x, p_y, p_z - hình chiếu của p trên các trục x, y, z ;

ℓ, m, n - cosin chỉ phương của pháp tuyến v với mặt biên tại điểm đặt tải trọng p .

Điều kiện biên về chuyển vị trên bề mặt biên S_u nối cứng với nền và nền được coi là không bị biến dạng ở mọi điểm trên S_u đều có $u = v = w = 0$.

6. Điều kiện ban đầu

Với bài toán động lực học, để xác định nghiệm còn phải dùng *điều kiện ban đầu*. Đó là các giá trị về chuyển vị hoặc vận tốc tại thời điểm ban đầu của chuyển động ($t = 0$), ví dụ:

$$u = u_0, v = v_0, w = w_0 \text{ v.v...}$$

7. Phương pháp giải

Với bài toán tĩnh, để tìm ứng suất hoặc chuyển vị của kết cấu Lý thuyết đàn hồi thường chọn một trong hai phương pháp:

a. Giải theo ứng suất

Từ các hệ phương trình trên biến đổi để còn 6 phương trình chỉ chứa ẩn là 6 thành phần ứng suất, từ đó giải tìm hàm biểu diễn 6 thành phần này:

$$\begin{aligned}
(1+\mu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} &= -2(1+\mu)\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \\
(1+\mu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} &= -2(1+\mu)\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \\
(1+\mu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} &= -2(1+\mu)\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \\
(1+\mu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} &= -(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\
(1+\mu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial z} &= -(1+\mu)\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right) \\
(1+\mu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z\partial x} &= -(1+\mu)\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{2.6.12}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

b. Giải theo chuyển vị

Từ các hệ phương trình trên biến đổi để còn 3 phương trình chỉ chứa ẩn là 3 thành phần chuyển vị (2.6.13), từ đó giải tìm hàm biểu diễn 3 thành phần này.

$$\begin{aligned}
(\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial x} + G\nabla^2 u + X &= 0 \\
(\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y &= 0 \\
(\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z &= 0
\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Do khó khăn về mặt toán học nên số bài toán có thể giải trực tiếp từ các phương trình trên bằng các phương pháp giải tích chỉ hạn chế ở những kết cấu có dạng hình học, tải trọng và điều kiện ràng buộc trên biên không phức tạp. Với nhiều bài toán, để giải được bằng phương pháp giải tích phải đưa thêm vào một số giả thiết không thật phù hợp với thực tế, ví dụ đập trọng lực hoặc trụ đỡ cửa van cung phải xem là nêm tam giác dài vô hạn, nên phải coi là đồng chất, đẳng hướng v.v... Để mở rộng phạm vi ứng dụng nhiều phương pháp gần đúng hoặc phương pháp số đã được phát triển, ví dụ phương pháp Ritz, phương pháp Bubnov-Galerkin, phương pháp sai phân, phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), phương pháp phần tử biên v.v... Các phương pháp này sẽ được trình bày ở mục 2.11.

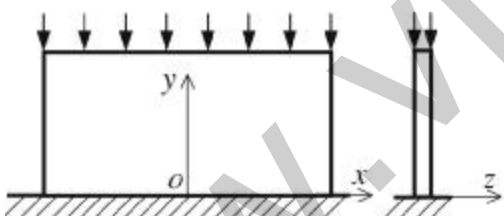
2.6.3. Bài toán phẳng

2.6.3.1. Khái niệm và phân loại

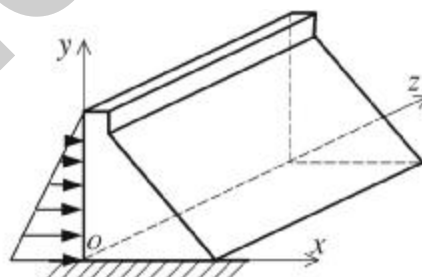
Trong thực tế công trình, ứng với một số kết cấu có dạng hình học và tải trọng nhất định ứng suất hoặc biến dạng theo một phương nào đó, giả sử phương z , có giá trị bằng 0 hoặc gần như bằng 0. Lúc này chỉ còn lại các thành phần ứng suất hoặc biến dạng nằm trong một mặt phẳng (mặt xy).

Trường hợp các thành phần ứng suất theo một phương bằng 0 ta có *bài toán ứng suất phẳng*. Ví dụ trụ đập hoặc trụ cống (hình 2.6.4 a) có bề dày (phương z) khá nhỏ so với kích thước theo phương chiều dài (phương x) và chiều cao (phương y). Do vậy, khi chịu tác dụng của tải trọng nằm trong mặt trung bình của trụ (mặt xy) ứng suất theo phương z gần như bằng 0, nên trụ có thể coi như thuộc bài toán ứng suất phẳng.

Trường hợp các thành phần biến dạng theo một phương bằng 0 ta có *bài toán biến dạng phẳng*. Ví dụ đập ngăn (hình 2.6.4 b) có kích thước theo phương trục đập (phương z) rất lớn so với kích thước theo hai phương kia (x, y), biến dạng theo phương trục đập gần như bằng 0, nên đập có thể coi như thuộc bài toán biến dạng phẳng. Với kết cấu ở bài toán biến dạng phẳng khi tính toán có thể xét phần kết cấu đại diện có chiều dài 1 m theo phương có biến dạng bằng 0, ví dụ ở bài toán đập là đoạn đập dài 1 m theo phương trục đập.



Hình 2.6.4 a: Trụ cống



Hình 2.6.4 b: Đập

2.6.3.2. Phương trình cơ bản trong hệ tọa độ vuông góc

Trong hệ tọa độ vuông góc các phương trình cơ bản dùng để giải bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng có dạng:

1. Phương trình cân bằng

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

2. Phương trình hình học

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.6.15)$$

3. Phương trình liên tục

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.6.16)$$

4. Phương trình vật lý

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\quad (2.6.17)$$

hoặc

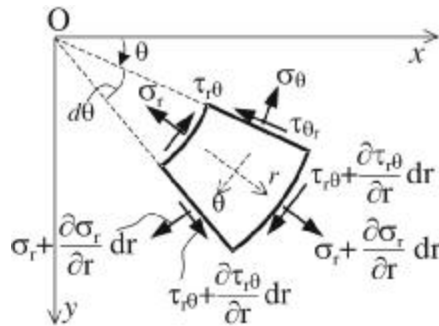
$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x - \mu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y - \mu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (2.6.18)$$

Chú ý là các phương trình (2.6.17) và (2.6.18) được viết cho bài toán ứng suất phẳng. Với bài toán biến dạng phẳng phải thay E và μ bằng các trị tương đương sau:

$$\begin{aligned}E &= \frac{E}{1-\mu^2} \\ \mu &= \frac{\mu}{1-\mu}\end{aligned}\quad (2.6.19)$$

2.6.3.3. Phương trình cơ bản trong hệ tọa độ cực

Để tiện cho việc giải, với các kết cấu có dạng hình học, chịu tải trọng và liên kết đối xứng trục hoặc kết cấu có dạng hình nêm chịu tải tập trung ở đỉnh v.v... các phương trình cân bằng, hình học, liên tục, vật lý thường được thiết lập trong hệ tọa độ cực (hình 2.6.5).



Hình 2.6.5: Các thành phần ứng suất tại một điểm trong hệ tọa độ cực

Cho cả bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng các phương trình cơ bản đều có thể viết chung ở dạng sau:

1. Ph- ơng trình cân bằng

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + Q &= 0 \end{aligned} \tag{2.6.20}$$

trong đó:

$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}$ - ứng suất pháp theo phương đường kính (hướng kính), ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến với chu vi (hướng vòng) và ứng suất tiếp trên các mặt có pháp tuyến theo phương hướng kính và hướng vòng;

R, Q - lực phân bố thể tích theo phương hướng kính và phương hướng vòng.

2. Ph- ơng trình hình học

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{2.6.21}$$

trong đó:

u, v - chuyển vị theo phương hướng kính và chuyển vị theo phương hướng vòng.

3. Ph- ơng trình liên tục

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \right) \epsilon_r + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \right) \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} \tag{2.6.22}$$

4. Phương trình vật lý

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_\theta \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_r \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G}\end{aligned}\quad (2.6.23)$$

Với bài toán biến dạng phẳng chỉ việc thay E và μ trong (2.6.23) bằng các trị tương đương biểu diễn trong (2.6.19).

2.6.3.4. Hàm ứng suất

Hàm ứng suất là hàm thỏa mãn điều kiện liên tục của biến dạng (2.6.16) biểu diễn qua ứng suất và được sử dụng để giải bài toán phẳng của Lý thuyết đàn hồi theo ứng suất. Nếu gọi φ là hàm ứng suất thì với trường hợp lực phân bố thể tích bằng hằng số, ví dụ $X = 0$, $Y = \gamma_b$ các thành phần ứng suất được xác định như sau:

1. Trong hệ tọa độ vuông góc

+ Công thức tính ứng suất từ hàm ứng suất:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \gamma_b x\end{aligned}\quad (2.6.24)$$

+ Phương trình liên tục của biến dạng được biểu diễn qua ứng suất:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

hoặc qua hàm ứng suất sau khi thay σ_x , σ_y được xác định từ (2.6.24):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.6.25)$$

2. Trong hệ tọa độ cực

+ Công thức tính ứng suất từ hàm ứng suất:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \tag{2.6.26}$$

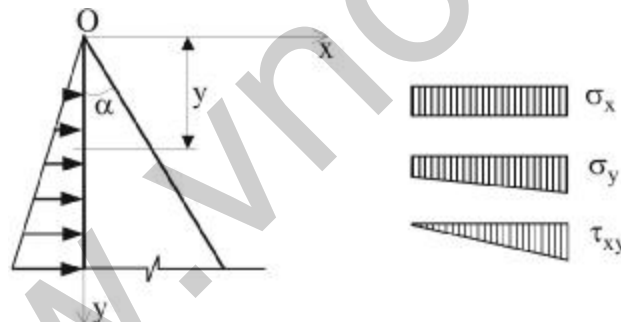
+ Điều kiện liên tục về biến dạng được biểu diễn qua hàm ứng suất:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \tag{2.6.27}$$

Các phương trình (2.6.25) và (2.6.27) là các *phương trình song điều hoà*, còn hàm ứng suất thoả mãn các phương trình này được gọi là *hàm song điều hoà*.

2.6.3.5. Một số lời giải liên quan đến kết cấu công trình thủy lợi

1. Đập bê tông trọng lực mặt cắt tam giác chịu tác dụng của trọng lượng bản thân với trọng lượng riêng γ_b và áp lực nước thượng lưu với trọng lượng riêng γ_n (hình 2.6.6)



Hình 2.6.6: Đập chịu tác dụng của tải trọng bản thân và áp lực nước thượng lưu

Đập thuộc bài toán biến dạng phẳng, do vậy khi giải có thể lấy một đoạn đập chiều dài 1 m theo phương trục đập làm đại diện. Phần đập này được coi là nẹp dài vô hạn với góc đỉnh là α . Bài toán được giải trong hệ tọa độ vuông góc. Hàm ứng suất thoả mãn phương trình song điều hoà (2.6.25) được chọn là hàm bậc 3:

$$\varphi = \frac{D}{6} x^2 + \frac{C}{2} x^2 y + \frac{F}{2} xy^2 + \frac{K}{6} y$$

trong đó các hệ số D, E, F, K được xác định từ điều kiện biên:

+ Trên mặt thượng lưu khi chỉ có áp lực nước theo phương nằm ngang:

$$\begin{aligned} \sigma_x \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha &= 0 \\ \tau_{xy} \sin \alpha - \sigma_y \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

+ Trên mặt hạ lưu (không có tải trọng theo phương pháp tuyến và tiếp tuyến):

$$\sigma_x = -\gamma_n y$$

$$\tau_{xy} = 0$$

Từ công thức (2.6.24) và các điều kiện biên xác định được các thành phần ứng suất ở điểm bất kỳ trong thân đập:

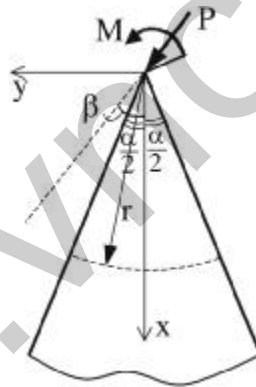
$$\sigma_x = -\gamma_n y$$

$$\sigma_y = (\gamma_b \operatorname{tg} \alpha - 2\gamma_n \operatorname{tg}^3 \alpha) x + (\gamma_n \operatorname{tg}^2 \alpha - \gamma_b) y \quad (2.6.28)$$

$$\tau_{xy} = -(\gamma_n \operatorname{tg}^2 \alpha) x$$

Có thể thấy σ_y có dạng giống như tính trong Sức bền vật liệu (SBVL), τ_{xy} khác với kết quả tính trong Sức bền vật liệu, còn σ_x không tính được trong SBVL. Biểu đồ của ba ứng suất này trên mặt cắt y của đập được biểu diễn trong hình 2.6.6.

2. Đập mặt cắt tam giác chịu tác dụng của lực tập trung P và mô men tập trung M ở đỉnh (hình 2.6.7)



Hình 2.6.7: Đập chịu tác dụng của lực tập trung và mô men tập trung ở đỉnh

Giống như ở bài toán trên khi giải cũng xét đoạn đập có chiều dài 1 m dọc theo phương trục đập. Đập được coi là nêm dài vô hạn với góc đỉnh là α . Bài toán được giải trong hệ tọa độ cực theo phương pháp cộng tác dụng:

+ Bài toán 1 - Trường hợp đập chỉ chịu tác dụng của lực tập trung P: Hàm ứng suất thoả mãn phương trình song điều hoà (2.6.27) được chọn ở dạng:

$$\varphi = Cr\theta \cos \theta + Dr\theta \sin \theta$$

Với hàm ứng suất này các ứng suất $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$. Hai hằng số tích phân C và D được xác định từ điều kiện cân bằng lực theo 2 phương x, y của ứng suất σ_r trên mặt trụ bán kính r với tải trọng P (hình 2.6.7):

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -P \cos \beta$$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r r \sin \theta d\theta = -P \sin \beta$$

Kết quả tìm được:

$$\sigma_r = \frac{2P \cos \beta \cos \theta}{r(2\alpha + \sin 2\alpha)} - \frac{2P \sin \beta \sin \theta}{r(2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

$$\sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$
(2.6.29)

+ Bài toán 2 - Trường hợp đập chỉ chịu tác dụng của mô men tập trung M: Hàm ứng suất thoả mãn phương trình song điều hoà (2.6.27) được chọn ở dạng:

$$\varphi = A\theta + B \sin \theta$$
(2.6.30)

Với hàm ứng suất này $\sigma_\theta = 0$. Hai hằng số tích phân A và B được xác định từ điều kiện ứng suất tiếp trên hai mặt nghiêng $\tau_{r\theta} = 0$ và điều kiện cân bằng của ứng suất trên mặt trụ bán kính r với mô men M (hình 2.6.7).

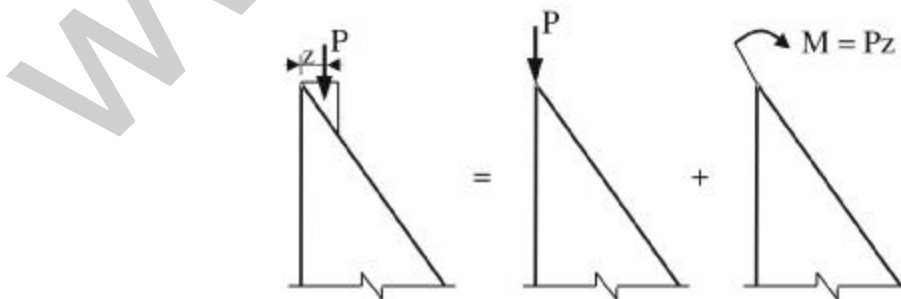
Kết quả tìm được:

$$\sigma_r = \frac{2M}{(2 \sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \frac{\sin 2\theta}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{M}{r^2} \frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}$$
(2.6.31)

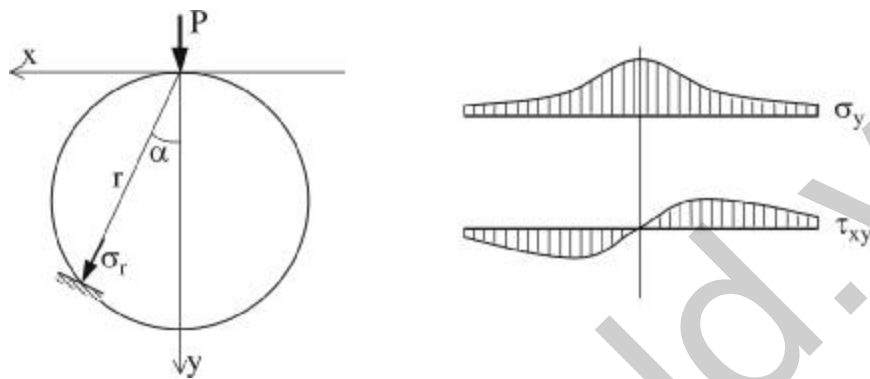
Chú ý là từ (2.6.29) và (2.6.31) có thể tìm các ứng suất $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ trong hệ tọa độ vuông góc oxy bằng các công thức tính ứng suất trên mặt nghiêng trình bày trong Sức bền vật liệu (mục 2.1).



Hình 2.6.8: Tính đập trọng lực có mặt cắt thực bằng phương pháp cộng tác dụng

Phối hợp các kết quả trình bày trong bài toán 1 và 2 có thể xây dựng lời giải cho cho đập trọng lực có mặt cắt thực như vẽ ở hình 2.6.8 bằng phương pháp cộng tác dụng, trong đó P và M là trọng lượng và mô men của khối vật liệu ở đỉnh đập ngoài phần đỉnh nê.

3. Nửa mặt phẳng vô hạn chịu lực tập trung thẳng đứng trên biên



Hình 2.6.9: Nửa mặt phẳng vô hạn chịu tải tập trung thẳng đứng trên biên

Về thực chất đây vẫn là bài toán biến dạng phẳng của nê với góc đỉnh $\alpha = \pi/2$. Do vậy ứng suất tại điểm bất kỳ trong nửa mặt phẳng vẫn được xác định bằng công thức (2.6.29). Tuy vậy, để tiện sử dụng công thức tính ứng suất thường được chuyển về viết trong hệ tọa độ vuông góc như sau:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}\quad (2.6.32)$$

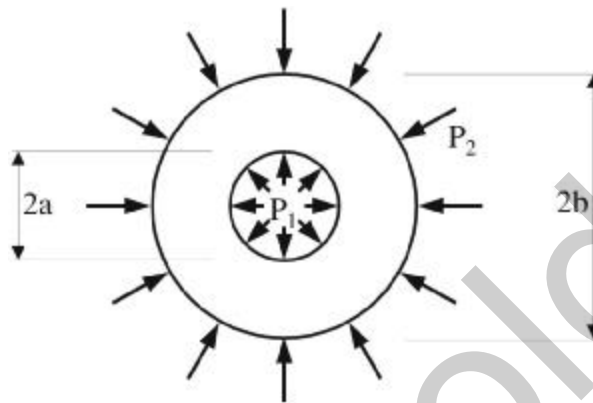
Từ (2.6.32) có thể vẽ được biểu đồ ứng suất σ_y và τ_{xy} trên mặt nằm ngang bất kỳ cách mặt nền một khoảng y như ở hình 2.6.9. Ứng suất σ_y đạt cực đại tại $x = 0$ còn τ_{xy} đạt cực đại tại $x = \pm \frac{y}{\sqrt{3}}$. Các trị này được tính bằng công thức:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{2P}{\pi y} = \frac{P}{1,57y} \\ \tau_{xy} &= \frac{2P}{\pi y} \frac{9}{16\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Chuyển vị thẳng đứng tại điểm trên mặt biên cách phương của tải trọng một khoảng d được tính bằng công thức:

$$v = \frac{2(1-\mu^2)P}{E} \ln \frac{d}{r} - \frac{(1+\mu)P}{\pi E} \quad (2.6.33)$$

4. Ống dày chịu áp lực đều bên trong p_1 và bên ngoài thành ống p_2



Hình 2.6.10: Ống dày

Ống làm việc ở trạng thái biến dạng phẳng nên khi tính toán cũng cắt đoạn ống có chiều dài 1 m theo chiều dài để xét. Bài toán được giải trong hệ tọa độ cực. Vì mặt cắt ống và tải trọng tác dụng có dạng đối xứng trục nên hàm ứng suất chỉ phụ thuộc vào r và do đó phương trình liên tục (2.6.27) được viết ở dạng phương trình vi phân thường:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

Hàm ứng suất thoả mãn phương trình này có thể lấy ở dạng:

$$\varphi = A \ln r + Cr^2$$

trong đó A và C được xác định từ điều kiện biên:

+ Tại chu vi trong của ống ($r = a$):

$$\sigma_r = -p_1$$

+ Tại chu vi ngoài của ống ($r = b$):

$$\sigma_r = -p_2$$

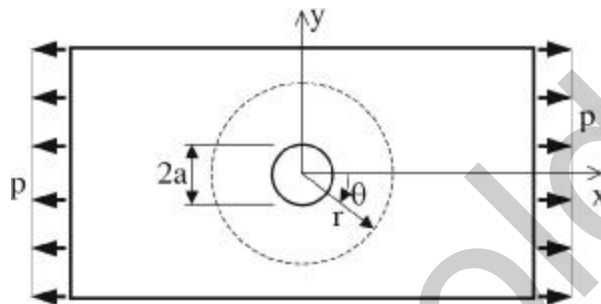
Từ công thức (2.6.26) và điều kiện biên tìm được công thức tính ứng suất:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_2 - p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_2 + p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \quad (2.6.34)$$

Biểu đồ ứng suất σ_r và σ_θ trên thành ống được vẽ trong hình 2.6.10. Trường hợp ống chỉ chịu áp lực bên trong ($p_2 = 0$), thành ống chịu kéo và ứng suất kéo lớn nhất xuất hiện ở mép trong ống:

$$\sigma_\theta = p_1 \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2}$$

5. Ứng suất quanh lỗ khoét tròn



Hình 2.6.11: Ứng suất quanh lỗ khoét tròn

Giả thiết có bản chịu kéo bởi lực phân bố đều p theo phương x , trong bản có một lỗ khoét tròn bán kính a , kích thước lỗ rất nhỏ so với kích thước của bản (hình 2.6.11). Bài toán được giải trong hệ tọa độ cực dựa trên lời giải của bài toán ống dày trình bày ở phần trên. Ứng suất quanh lỗ khoét được tính bằng công thức:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.6.35)$$

Phân bố của ứng suất pháp hướng vòng σ_θ trên mặt cắt thẳng đứng đi qua tâm lỗ khoét có dạng như hình 2.6.11.

2.6.4. Bài toán không gian đối xứng trục

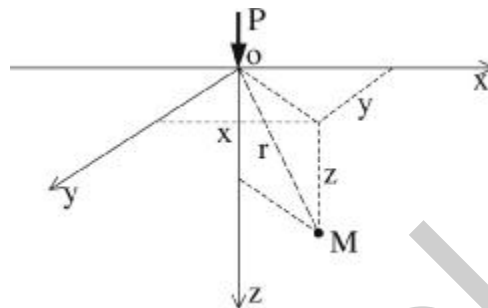
2.6.4.1. Nửa không gian vô hạn chịu lực tập trung thẳng đứng trên mặt biên

Bài toán được giải bằng phương pháp chuyển vị trên cơ sở hệ phương trình (2.6.15). Nghiệm tìm được có dạng:

$$u = A \frac{zx}{r^2} + \frac{Bx}{r(r+z)}$$

$$v = A \frac{zy}{r^2} + \frac{By}{r(r+z)}$$

$$w = A \left[\frac{z^2}{r^3} + \frac{\lambda + 3G}{(\lambda + G)r} \right] + \frac{B}{r}$$



Hình 2.6.12: Nửa không gian vô hạn chịu lực tập trung trên mặt biên

Các thành phần ứng suất được xác định từ các thành phần chuyển vị từ phương trình vật lý:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2G \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2G \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Các hằng số tích phân A, B được xác định từ điều kiện biên về lực:

- Trên mặt biên ($z = 0$):
 $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$.
- Cân bằng của P với ứng suất tác dụng trên nửa mặt cầu tâm O, bán kính r.

Kết quả tìm được lời giải:

- Ứng suất theo phương thẳng đứng tại điểm bất kỳ trong nửa không gian:

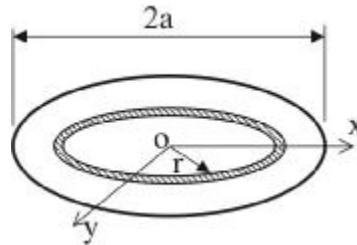
$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{r^5} \tag{2.6.34}$$

- Chuyển vị thẳng đứng của điểm bất kỳ trên mặt biên ($z = 0$):

$$w = \frac{(1 - \mu^2) P}{\pi E} \frac{1}{r} \tag{2.6.35}$$

Đây là hai công thức được sử dụng nhiều trong tính toán công trình.

2.6.4.2. Nửa không gian vô hạn chịu lực phân bố đều thẳng đứng trên mặt biên



Hình 2.6.13: Nửa không gian vô hạn chịu lực phân bố đều thẳng đứng trên mặt biên

Giả thiết lực phân bố tác dụng trên mặt biên trong diện tích vòng tròn tâm O, bán kính a (hình 2.6.13). Công thức tính toán cho trường hợp này có thể suy ra từ trường hợp trên bằng cách lấy tích phân các biểu thức (2.6.34), (2.6.35) với

$$dP = q r d\varphi dr$$

trên diện tích vòng tròn. Kết quả tìm được:

- + Ứng suất theo phương thẳng đứng tại điểm bất kỳ trong nửa không gian:

$$\sigma_z = q \left[\frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right] \quad (2.6.36)$$

- + Chuyển vị thẳng đứng của điểm bất kỳ trên mặt biên ($z = 0$):

$$w = \frac{4(1 - \mu^2)}{\pi E} qa \quad (2.6.37)$$

2.6.5. Tấm mỏng đàn hồi

2.6.5.1. Khái niệm và giả thiết tính toán

Tấm mỏng là kết cấu tấm có tỷ lệ giữa bề dày h và kích thước cạnh ngắn nhất của tấm b nằm trong phạm vi:

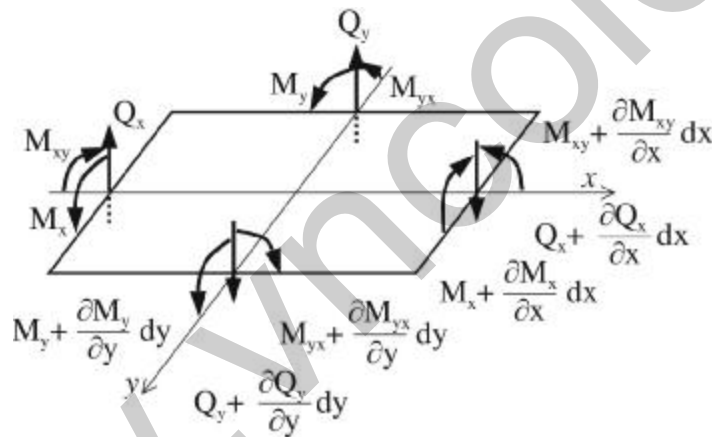
$$\left(\frac{1}{80} \div \frac{1}{100} \right) < \frac{h}{b} < \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{8} \right)$$

Mặt chia đôi chiều dày của tấm được gọi là *mặt trung bình*. Dưới tác dụng của tải trọng có phương vuông góc với mặt trung bình tấm bị võng và trên mặt cắt vuông góc với mặt trung bình xuất hiện các nội lực là mô men uốn M_x , M_y , mô men xoắn M_{xy} và lực cắt Q_x , Q_y (hình 2.6.14). *Chú ý là ký hiệu nội lực sử dụng ở đây khác với ký hiệu nội lực sử dụng trong Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu*. Điểm khác biệt thứ nhất là các

Chỉ số x và y ở đây chỉ pháp tuyến của các mặt trên đó mô men và lực cắt tác dụng chứ không phải là trục quay của mô men hay phương của lực cắt. Điểm khác biệt thứ hai là nội lực không được tính cho toàn bộ chiều dài mặt cắt ngang của tấm có pháp tuyến song song với phương của trục x hoặc trục y mà chỉ cho một đơn vị chiều dài quy ước là 1 m.

Để xây dựng phương trình tính tấm ngoài các giả thiết nêu ở mục 2.6.1 còn đưa vào thêm một số giả thiết sau:

- + Pháp tuyến của mặt trung bình trước khi tấm chịu uốn vẫn giữ vuông góc với mặt trung bình sau khi tấm bị uốn (giả thiết Kiéc-khốp).
- + Tải trọng có phương vuông góc với mặt trung bình không gây biến dạng kéo hoặc nén trong mặt trung bình của tấm.
- + Không xét ứng suất pháp và biến dạng theo phương vuông góc với mặt trung bình của tấm.



Hình 2.6.14: Nội lực trên mặt cắt ngang của tấm

2.6.5.2. Phương trình cơ bản

1. Phương trình cân bằng biểu diễn quan hệ giữa nội lực trên mặt cắt ngang của tấm với nhau và với tải trọng phân bố có phương vuông góc với mặt trung bình:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

hoặc thu về một phương trình bằng cách rút Q_x , Q_y từ 2 phương trình đầu thay vào phương trình thứ 3:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (2.6.38)$$

2. Phương trình hình học

Từ giả thiết Kiết-khớp, do pháp tuyến của mặt trung bình vẫn giữ vuông góc với mặt trung bình sau biến dạng nên chuyển vị u và v tại điểm bất kỳ nằm trên mặt song song với mặt trung bình và cách mặt trung bình một đoạn z được xác định bằng công thức:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

trong đó w là độ võng của tấm.

Vì bỏ qua biến dạng theo phương vuông góc với mặt trung bình của tấm nên phương trình hình học của tấm có dạng tương tự (2.6.17) như ở bài toán phẳng. Nếu thay u , v xác định như ở trên vào (2.6.17) được phương trình hình học biểu diễn qua độ võng:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.6.39)$$

$$\gamma_{xy} = 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

3. Phương trình vật lý

Vì vật liệu của tấm được giả thiết tuân theo định luật Húc, đồng thời bỏ qua ứng suất và biến dạng theo phương vuông góc với mặt trung bình nên quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của tấm vẫn được biểu diễn bằng phương trình (2.6.20) như ở bài toán phẳng.

Tuy vậy, với bài toán tấm phương trình vật lý thường được biểu diễn dưới dạng quan hệ giữa nội lực và độ võng. Để làm việc này sử dụng quan hệ giữa ứng suất và nội lực trên mặt cắt ngang của tấm tương tự như ở trong Sức bền vật liệu:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

Tiếp đó thay biểu thức tính ứng suất từ độ võng và thực hiện các tích phân. Kết quả thu được:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \tag{2.6.40}$$

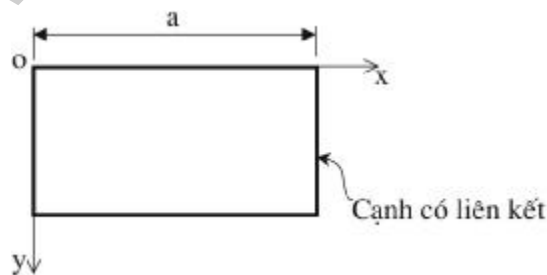
$$M_x = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

trong đó: D là độ cứng trụ của tấm:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \tag{2.6.41}$$

với: E và μ là mô đun đàn hồi và hệ số Poát-xông của vật liệu tấm.

4. Điều kiện biên



Hình 2.6.15: Liên kết trên cạnh tấm

Ràng buộc về chuyển vị và nội lực trên biên của tấm phụ thuộc vào hình thức liên kết tại biên. Chẳng hạn, với tấm chữ nhật có các cạnh song song với trục x và trục y (hình 2.6.15) thì điều kiện biên trên cạnh $x = a$ trong các điều kiện liên kết khác nhau được biểu diễn như sau:

+ Liên kết ngàm tại cạnh $x = a$: Độ võng và góc xoay trên cạnh bằng 0

$$w = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

+ Liên kết khớp tại cạnh $x = a$: Độ võng và mô men uốn trên cạnh bằng 0

$$w = 0$$

$$M_x = 0$$

hoặc

$$w = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

+ Cạnh $x = a$ tự do: Mô men uốn và lực cắt trên cạnh bằng 0

$$M_x = 0$$

$$Q_x + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = 0$$

hoặc

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

5. Phương pháp giải

Tấm được giải theo phương pháp chuyển vị. Thay (2.6.40) vào (2.6.38) được phương trình cân bằng biểu diễn qua độ võng:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.6.42)$$

Phương trình này do Sô-phi Giec-manh thiết lập nên được gọi là phương trình Sô-phi Giec-manh.

Lời giải giải tích được thực hiện trên cơ sở tìm nghiệm tổng quát của phương trình (2.6.42), sau đó xác định các hằng số tích phân từ điều kiện biên.

2.6.5.3. Một số bài toán đơn giản

1. Tấm chữ nhật

Lời giải giải tích chỉ được thực hiện với một số dạng tải trọng và liên kết nhất định, ví dụ tấm chịu tải trọng phân bố đều hoặc tải trọng tập trung có cạnh liên kết ngàm hoặc tựa v.v... Lời giải thường được biểu diễn ở dạng chuỗi lượng giác kép.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

với a, b là kích thước cạnh của tấm theo phương x và theo phương y. Trục x và trục y được chọn trùng với cạnh của tấm (hình 2.6.15). Dưới đây trình bày lời giải cho hai trường hợp cụ thể.

+ Tấm chữ nhật cạnh a, b chu vi tựa, chịu tải phân bố đều q:

$$w = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (2.6.43)$$

+ Tấm chữ nhật cạnh a, b, chu vi tựa chịu tải tập trung P tại điểm có tọa độ x = c, y = d:

$$w = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.6.44)$$

Từ biểu thức tính độ võng có thể tìm biểu thức tính nội lực bằng các công thức (2.6.40).

2. Tấm tròn hoặc ellip

Để tiện cho việc giải với bài toán này thường sử dụng phương trình vi phân độ võng thiết lập trong hệ tọa độ cực:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (2.6.45)$$

trong đó:

r - chỉ phương hướng kính;

q - chỉ phương hướng vòng.

Phương trình trên có thể giải trực tiếp cho tấm tròn bán kính a. Dưới đây trình bày kết quả tính độ võng và mô men uốn cho một số bài toán đối xứng trục.

+ Tấm chu vi ngàm, chịu tải trọng phân bố đều q:

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2$$

$$M_r = \frac{q}{16} [a^2 (1 + \mu) - r^2 (3 + \mu)] \quad (2.6.46)$$

$$M_\theta = \frac{q}{16} [a^2 (1 + \mu) - r^2 (1 + 3\mu)]$$

+ Tấm chu vi tựa, chịu tải trọng phân bố đều q :

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \left(\frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \mu} \right) \right]$$

$$M_r = \frac{q(3 + \mu)}{16} (a^2 - r^2) \quad (2.6.47)$$

$$M_\theta = \frac{q}{16} [a^2(3 + \mu) - r^2(1 + 3\mu)]$$

+ Tấm chu vi ngàm, chịu tải trọng tập trung P tại tâm:

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{1}{2} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right] \quad (2.6.48)$$

+ Tấm chu vi tựa, chịu tải trọng tập trung P tại tâm :

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{1}{2} \frac{3 + \mu}{1 + \mu} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right] \quad (2.6.49)$$

2.6.5.4. Bảng tra

Để tiện sử dụng, các kết quả tính nội lực và độ võng của tấm được lập bảng để tra cứu. Mỗi bảng ứng với một dạng hình học, liên kết trên cạnh và tải trọng tác dụng vuông góc với mặt tấm. Dưới đây giới thiệu một số bảng tra dùng cho tấm chữ nhật, tấm tam giác chịu tải trọng phân bố đều hoặc tải trọng phân bố dạng áp lực thủy tĩnh là những dạng tấm thường hay gặp trong kết cấu công trình thủy lợi (bảng 2.6.1, 2.6.2). Phối hợp các bảng tra này có thể tính tấm chịu tải trọng hình thang hoặc dạng tam giác khác.

Với các tấm có dạng chu vi, liên kết hoặc tải trọng bất kỳ, tấm có lỗ khoét v.v... thường khó hoặc không thể giải bằng phương pháp giải tích mà phải sử dụng phương pháp số, trong đó phương pháp được sử dụng phổ biến nhất hiện nay là phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) thông qua các phần mềm được lập sẵn như SAP hoặc ANSYS... Nội dung của phương pháp PTHH được trình bày trong mục 2.11.

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

www.vncold.vn

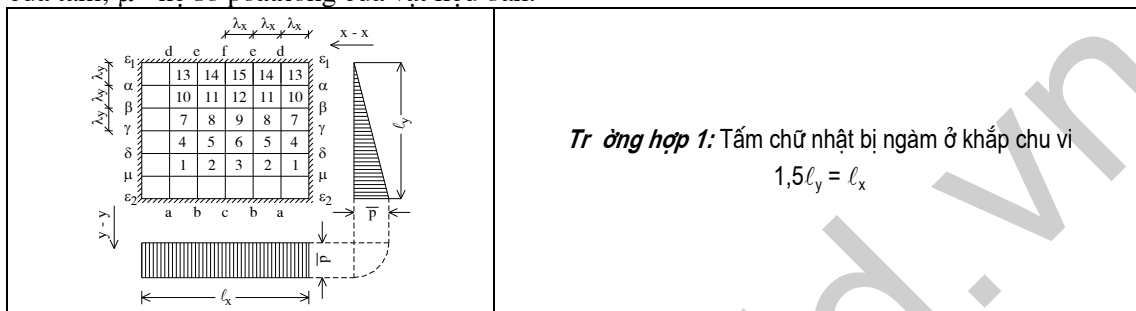
www.vncold.vn

Bảng 2.6.2: Tính tám chữ nhật và tám tam giác chịu tải phân bố hình tam giác

Các ký hiệu được dùng: độ võng: w ; phản lực gối tựa: Q ; độ cong W ; mômen uốn: M ;

độ cứng của tám: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ trong đó E - môđun đàn hồi của vật liệu tám; h - chiều dày

của tám; μ - hệ số Poisson của vật liệu bản.



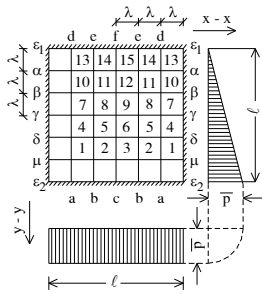
Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0	0,564	0	0,4582	-0,0764	-0,4582
e	0	0,497	0	0,3992	-0,0665	-0,3992
d	0	0,258	0	0,2183	-0,0364	-0,2183
ϵ_1	0	0	0	0	0	0
α	0	0,134	0,0970	0	-0,0970	-0,0161
β	0	0,493	0,2423	0	-0,2423	-0,0404
γ	0	0,749	0,3326	0	-0,3326	-0,0554
δ	0	0,816	0,3069	0	-0,3069	-0,0511
μ	0	0,662	0,1610	0	-0,1610	-0,0268
ϵ_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,944	0	0,3622	-0,0640	-0,3622
b	0	1,289	0	0,5994	-0,0999	-0,5994
c	0	1,372	0	0,6700	-0,1117	-0,6700
1	0,08048	-	-0,0279	-0,0170	0,0306	0,0216
2	0,13320	-	-0,0370	-0,0006	0,0371	0,0067
3	0,14889	-	-0,0314	0,0089	0,0299	-0,0036
4	0,15343	-	-0,0407	-0,1351	0,0632	0,1419
5	0,26615	-	-0,0771	-0,2306	0,1156	0,2435
6	0,30173	-	-0,0712	-0,2601	0,1145	0,2719
7	0,16631	-	-0,0360	-0,1306	0,0578	0,1366
8	0,29660	-	-0,0879	-0,2419	0,1282	0,2566
9	0,33898	-	-0,0848	-0,2798	0,1314	0,2939
10	0,12113	-	-0,0227	-0,0618	0,0330	0,0655
11	0,21950	-	-0,0660	-0,1208	0,0861	0,1318
12	0,25189	-	-0,0648	-0,1417	0,0884	0,1525
13	0,04850	-	-0,0083	0,0543	-0,0007	-0,0530
14	0,08871	-	-0,0271	0,0947	0,0113	-0,0902
15	0,10183	-	-0,0262	0,1085	0,0081	-0,1042
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda_x^4}{D}$	$\bar{p}\lambda_x$	$\frac{\bar{p}\lambda_x^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda_x^2}{D}$	$\bar{p}\lambda_x^2$	$\bar{p}\lambda_x^2$

Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0	0,578	0	0,5992	-0,0999	-0,5992
e	0	0,568	0	0,4949	-0,0825	-0,4949
d	0	0,157	0	0,2302	-0,0384	-0,2302
ε_1	0	0	0	0	0	0
α	0	0,240	0,2302	0	-0,2302	-0,0384
β	0	0,766	0,5729	0	-0,5729	-0,0955
γ	0	1,158	0,8051	0	-0,8051	-0,1342
δ	0	1,271	0,7835	0	-0,7835	-0,1306
μ	0	0,940	0,4485	0	-0,4485	-0,0757
ε_2	0	0	0	0	0	0
a	0	1,023	0	0,4485	-0,0757	-0,4485
b	0	1,569	0	0,8615	-0,1436	-0,8615
c	0	1,737	0	1,0110	-0,1685	-1,0110
1	0,22426	-	-0,0178	-0,0567	0,0272	0,0597
2	0,43076	-	-0,1318	-0,0756	0,1443	0,0975
3	0,50550	-	-0,1495	-0,0764	0,1622	0,1014
4	0,39177	-	0,0024	-0,1567	0,0237	0,1563
5	0,78596	-	-0,2456	-0,3116	0,2975	0,3526
6	0,93455	-	-0,2972	-0,3693	0,3587	0,4188
7	0,40256	-	0,0244	-0,1269	-0,0033	0,1228
8	0,82953	-	-0,2622	-0,2718	0,3075	0,3155
9	0,99428	-	-0,3295	-0,3295	0,3844	0,3844
10	0,28643	-	0,0285	-0,0552	-0,0193	0,0504
11	0,60132	-	-0,1917	-0,1257	0,2127	0,1576
12	0,72451	-	-0,2464	-0,1551	0,2722	0,1962
13	0,11513	-	0,0172	0,0562	-0,0265	-0,0590
14	0,24744	-	-0,0801	0,1064	0,0624	-0,0931
15	0,29961	-	-0,1043	0,1253	0,0835	-0,1079
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda^4}{D}$	$\bar{p}\lambda$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$

Trờng hợp 2: Tấm hình vuông bị ngàm ở khắp chu vi

$$l_y = l_x = l$$

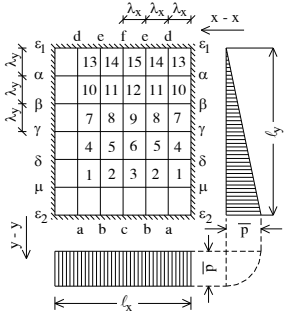


Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0	0,253	0	0,2014	- 0,0336	- 0,2014
e	0	0,194	0	0,1631	- 0,0271	- 0,1631
d	0	0,036	0	0,0718	- 0,01200	- 0,0718
ϵ_1	0	0	0	0	0	0
α	0	0,244	0,1615	0	- 0,1616	- 0,0269
β	0	0,636	0,3857	0	- 0,3857	- 0,0643
γ	0	0,968	0,5641	0	- 0,5641	- 0,0940
δ	0	1,150	0,6129	0	- 0,6129	- 0,1021
μ	0	0,958	0,4189	0	- 0,4189	- 0,0698
ϵ_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,721	0	0,1862	0,0310	- 0,1862
b	0	1,115	0	0,3860	0,0643	- 0,3860
c	0	1,246	0	0,4639	0,0773	- 0,4639
1	0,09310	—	0,0153	- 0,0500	0,0070	0,0474
2	0,19300	—	- 0,1371	- 0,0920	0,1521	0,1149
3	0,23196	—	- 0,1753	- 0,1063	0,1930	0,1355
4	0,13620	—	0,0486	- 0,0539	- 0,0396	0,0458
5	0,29398	—	- 0,2119	- 0,1182	0,2316	0,1535
6	0,35759	—	- 0,2862	- 0,1442	0,3103	0,1920
7	0,12536	—	0,0587	- 0,0288	- 0,0539	0,0190
8	0,27681	—	- 0,2009	- 0,0680	0,2122	0,1014
9	0,33898	—	- 0,2798	- 0,0848	0,2939	0,1314
10	0,08571	—	0,0456	- 0,0102	- 0,0439	0,0026
11	0,19167	—	- 0,1396	- 0,0250	0,1437	0,0482
12	0,23560	—	- 0,1977	- 0,0316	0,2029	0,0645
13	0,03589	—	0,0220	0,0139	- 0,0243	- 0,0176
14	0,08157	—	- 0,0598	0,0285	- 0,0551	- 0,0186
15	0,10065	—	- 0,0859	0,0343	- 0,0802	- 0,0200
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda_y^4}{D}$	$\bar{p}\lambda_y$	$\frac{\bar{p}\lambda_y^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda_y^2}{D}$	$\bar{p}\lambda_y^2$	$\bar{p}\lambda_y^2$

Trờng hợp 3: Tấm chữ nhật bị ngâm ở khắp chu vi

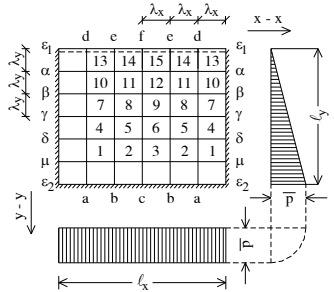
$$\ell_y = 1,5\ell_x$$



Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0	0,411	0	0	0	0
e	0	0,354	0	0	0	0
d	0	0,100	0	0	0	0
ϵ_1	0	0	0	0	0	0
α	0	0,360	0,2104	0	-0,2104	-0,0351
β	0	0,664	0,3691	0	-0,3691	-0,0615
γ	0	0,852	0,4291	0	-0,4291	-0,0715
δ	0	0,856	0,3605	0	-0,3605	-0,0600
μ	0	0,613	0,1777	0	-0,1777	-0,0296
ϵ_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,961	0	0,3999	-0,0666	-0,3999
b	0	1,368	0	0,6902	-0,1151	-0,6902
c	0	1,475	0	0,7828	-0,1305	-0,7828
1	0,08886	-	-0,0243	0,0057	0,0233	-0,0017
2	0,15337	-	-0,0439	0,0445	0,0365	-0,0372
3	0,17397	-	-0,0412	0,0627	0,0307	-0,0559
4	0,18027	-	-0,0340	-0,1285	0,0554	0,1342
5	0,32652	-	-0,0969	-0,2225	0,1340	0,2387
6	0,37582	-	-0,0986	-0,2521	0,1406	0,2686
7	0,21455	-	-0,0283	-0,1447	0,0524	0,1494
8	0,40077	-	-0,1214	-0,2776	0,1677	0,2978
9	0,46560	-	-0,1297	-0,3249	0,1838	0,3465
10	0,18453	-	-0,0174	-0,1109	0,0359	0,1138
11	0,35164	-	-0,1078	-0,2244	0,1451	0,2423
12	0,41100	-	-0,1187	-0,2667	0,1632	0,2865
13	0,10523	-	-0,0076	-0,0583	0,0174	0,0596
14	0,20280	-	-0,0625	-0,1214	0,0828	0,1318
15	0,23785	-	-0,0701	-0,1456	0,0944	0,1572
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda_x^4}{D}$	$\bar{p}\lambda_x$	$\frac{\bar{p}\lambda_x^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda_x^2}{D}$	$\bar{p}\lambda_x^2$	$\bar{p}\lambda_x^2$

Trờng hợp 4a: Tấm chữ nhật bị ngàm ở 3 cạnh và tựa tự do ở cạnh thứ 4
 $1,5l_y = l_x$



Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0	1,145	0	0	0	0
e	0	1,070	0	0	0	0
d	0	0,711	0	0	0	0
ε_1	0	0	0	0	0	0
α	0	0,979	0,3370	0	-0,3370	-0,0562
β	0	1,081	0,5017	0	-0,5017	-0,0836
γ	0	0,907	0,4800	0	-0,4800	-0,0800
δ	0	0,555	0,3240	0	-0,3240	-0,0540
μ	0	0,120	0,1225	0	-0,1225	-0,0204
ε_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,285	0	0,2756	-0,0460	-0,2756
b	0	0,616	0	0,5360	-0,0893	-0,5360
c	0	0,718	0	0,6277	-0,1046	-0,6277
1	0,06125	-	-0,0031	0,0889	-0,0114	-0,0883
2	0,11911	-	-0,0375	0,1627	0,0104	-0,1564
3	0,13949	-	-0,0408	0,1894	0,0092	-0,1826
4	0,16200	-	-0,0135	-0,0512	0,0220	0,0534
5	0,31052	-	-0,0959	-0,1085	0,1139	0,1245
6	0,36317	-	-0,1053	-0,1300	0,1270	0,1476
7	0,23999	-	-0,0263	-0,1511	0,0515	0,1554
8	0,45371	-	-0,1383	-0,2957	0,1876	0,3187
9	0,52906	-	-0,1507	-0,3481	0,2087	0,3732
10	0,25085	-	-0,0362	-0,2097	0,0712	0,2157
11	0,46548	-	-0,1399	-0,3869	0,2044	0,4102
12	0,540223	-	-0,1495	0,4482	0,2242	0,4731
13	0,16850	-	-0,0317	-0,1939	0,0640	0,1991
14	0,30532	-	-0,0899	-0,3266	0,1443	0,3416
15	0,35222	-	-0,0938	-0,3695	0,1554	0,3851
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda_x^4}{D}$	$\bar{p}\lambda_x$	$\frac{\bar{p}\lambda_x^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda_x^2}{D}$	$\bar{p}\lambda_x^2$	$\bar{p}\lambda_x^2$

Trờng hợp 4b: Tấm chữ nhật bị ngàm ở 3 cạnh
và tựa tự do ở cạnh thứ 4

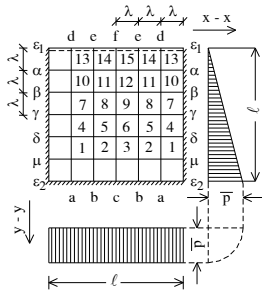
$$1,5\ell_y = \ell_x$$

Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0	0,444	0	0	0	0
e	0	0,337	0	0	0	0
d	0	-0,021	0	0	0	0
ε_1	0	0	0	0	0	0
α	0	0,488	0,3998	0	-0,3998	-0,0666
β	0	0,925	0,7295	0	-0,7295	-0,1216
γ	0	1,237	0,9049	0	-0,9049	-0,1508
δ	0	1,299	0,8315	0	-0,8315	-0,1385
μ	0	0,937	0,4617	0	-0,4617	-0,0770
ε_2	0	0	0	0	0	0
a	0	1,020	0	0,4617	-0,0770	-0,4617
b	0	1,589	0	0,8981	-0,1497	-0,8981
c	0	1,767	0	1,0583	-0,1764	-0,0583
1	0,23087	—	-0,0127	-0,0460	0,0203	0,0481
2	0,14906	—	-0,1381	-0,0527	0,1469	0,0757
3	0,52915	—	-0,1602	-0,0485	0,1683	0,0752
4	0,41575	—	0,0139	-0,1482	0,0107	0,1458
5	0,84545	—	-0,2654	-0,2950	0,3145	0,3392
6	1,00976	—	-0,3286	-0,3498	0,3869	0,4045
7	0,45245	—	0,0420	-0,1244	-0,0212	0,1174
8	0,94686	—	0,3007	-0,2709	0,3453	0,3210
9	1,14061	—	-0,3875	-0,3299	0,4425	0,3944
10	0,36173	—	0,0479	-0,0771	-0,0351	0,0691
11	0,77740	—	-0,2485	-0,1775	0,2780	0,2189
12	0,94160	—	-0,3284	-0,2196	0,3650	0,2743
13	0,19991	—	0,0307	-0,0351	-0,0248	0,0300
14	0,43048	—	-0,1380	-0,0836	0,1520	0,1066
15	0,52302	—	-0,1851	-0,1044	0,2025	0,1353
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda^4}{D}$	$\bar{p}\lambda$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$

Trình hợp 5a: Tấm hình vuông bị ngàm ở 3 cạnh và tựa tự do ở cạnh thứ 4

$$l_y = l_x = l$$

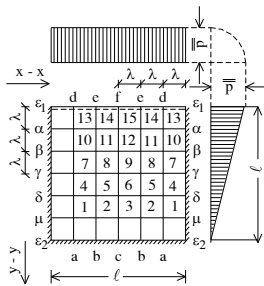


Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0	1,495	0	0	0	0
e	0	1,333	0	0	0	0
d	0	0,721	0	0	0	0
ε_1	0	0	0	0	0	0
α	0	1,388	0,7502	0	-0,7502	-0,1250
β	0	1,553	1,0593	0	-1,0593	-0,1765
γ	0	1,298	0,9798	0	-0,9798	-0,1633
δ	0	0,814	0,6566	0	-0,6566	-0,1094
μ	0	0,236	0,2533	0	-0,2533	-0,0422
ε_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,152	0	0,2533	-0,0422	-0,2533
b	0	0,503	0	0,5585	-0,0931	-0,5585
c	0	0,631	0	0,6815	-0,1136	-0,6815
1	0,12666	-	0,0259	0,0750	-0,0381	-0,0793
2	0,27927	-	-0,0911	0,1463	0,0667	-0,1311
3	0,34075	-	-0,1230	0,1738	0,0940	-0,1533
4	0,32827	-	0,0483	-0,0400	-0,0417	0,0319
5	0,70487	-	-0,2262	-0,0966	0,2423	0,1343
6	0,85528	-	-0,3008	-0,1122	-0,3210	0,1713
7	0,48992	-	0,0540	-0,1219	-0,0337	0,1129
8	1,03888	-	-0,3292	-0,2700	0,3742	0,3249
9	1,24863	-	-0,4295	-0,3305	0,4846	0,4020
10	0,52963	-	0,0336	-0,1942	-0,0012	0,1886
11	1,09288	-	-0,3446	-0,4018	0,4115	0,4592
12	1,31151	-	-0,4373	-0,4820	0,5177	0,5549
13	0,37512	-	-0,0002	-0,2206	0,0370	0,2206
14	0,75000	-	-0,2325	-0,4071	0,3004	0,4459
15	0,89237	-	-0,2847	-0,4732	0,3636	0,5207
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda^4}{D}$	$\bar{p}\lambda$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$

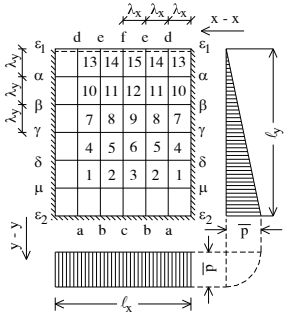
Trờng hợp 5b: Tấm hình vuông bị ngàm ở 3 cạnh
và tựa tự do ở cạnh thứ 4

$$l_y = l_x = l$$



Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0	0,220	0	0	0	0
e	0	0,154	0	0	0	0
d	0	-0,049	0	0	0	0
ε_1	0	0	0	0	0	0
α	0	0,342	0,2167	0	-0,2167	-0,0361
β	0	0,679	0,4203	0	-0,4203	-0,0700
γ	0	0,981	0,5787	0	-0,5787	-0,0964
δ	0	1,152	0,6174	0	-0,6174	-0,1029
μ	0	0,958	0,4197	0	-0,4197	-0,0700
ε_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,720	0	-0,1865	-0,0311	-0,1865
b	0	1,115	0	0,3872	-0,0645	-0,3872
c	0	1,246	0	0,4655	-0,0776	-0,4655
1	0,09327	-	0,0158	-0,0493	-0,0076	-0,0467
2	0,19358	-	-0,1376	-0,0904	-0,1526	0,1133
3	0,23275	-	-0,1763	-0,1043	0,1937	0,1337
4	0,13721	-	0,0502	-0,0526	-0,0415	0,0442
5	0,29674	-	-0,2140	-0,1150	0,2331	0,1506
6	0,36117	-	-0,2899	-0,1403	0,3133	0,1886
7	0,12859	-	0,0625	-0,0266	-0,0580	0,0162
8	0,28495	-	-0,2070	-0,0633	0,2175	0,0978
9	0,34932	-	-0,2897	-0,0792	0,3029	0,1274
10	0,09340	-	0,0518	-0,0100	-0,0504	0,0014
11	0,20984	-	-0,1530	-0,0258	0,1572	0,0513
12	0,25830	-	-0,2181	-0,0329	0,2235	0,0693
13	0,04815	-	0,0284	0,0291	0,0279	-0,0018
14	0,10892	-	0,0795	-0,0080	0,0808	0,0213
15	0,13436	-	-0,1144	-0,0104	0,1162	0,0295
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda_y^4}{D}$	$\bar{p}\lambda_y$	$\frac{\bar{p}\lambda_y^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda_y^2}{D}$	$\bar{p}\lambda_y^2$	$\bar{p}\lambda_y^2$

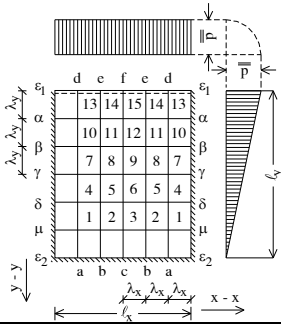


Trờng hợp 6a: Tấm chữ nhật bị ngàm ở 3 cạnh
và tựa tự do ở cạnh thứ 4
 $l_y = 1,5l_x$

Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0	1,154	0	0	0	0
e	0	1,015	0	0	0	0
d	0	0,537	0	0	0	0
ϵ_1	0	0	0	0	0	0
α	0	1,196	0,5509	0	-0,5509	-0,0918
β	0	1,251	0,6951	0	-0,6951	-0,1159
γ	0	0,998	0,5985	0	-0,5985	-0,0997
δ	0	0,642	0,3964	0	-0,3964	-0,0661
μ	0	0,242	0,1634	0	-0,1634	-0,0272
ϵ_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,034	0	0,0726	-0,0121	-0,0276
b	0	0,194	0	0,1659	-0,0276	-0,1659
c	0	0,254	0	0,2050	-0,0342	-0,2050
1	0,03630	-	0,0232	0,0155	-0,0258	-0,0193
2	0,08294	-	-0,0609	0,0323	0,0555	-0,0221
3	0,10252	-	-0,0881	0,0390	0,0816	-0,0243
4	0,08809	-	0,0495	-0,0069	-0,0484	-0,0014
5	0,19819	-	-0,1445	-0,0174	0,1474	0,0415
6	0,24405	-	-0,2064	-0,0222	0,2101	0,0566
7	0,13301	-	0,0675	-0,0235	-0,0636	0,0122
8	0,29603	-	-0,2152	-0,0569	0,2247	0,0928
9	0,36338	-	-0,3031	-0,0715	0,3150	0,1221
10	0,15446	-	-0,0630	-0,0535	-0,0541	0,0430
11	0,33692	-	-0,2435	-0,1201	0,2635	0,1607
12	0,41116	-	-0,3341	-0,1476	0,3587	0,2032
13	0,12243	-	-0,0290	-0,0904	-0,0139	0,0856
14	0,25773	-	-0,1837	-0,1785	0,2135	0,2092
15	0,31139	-	-0,2415	-0,2116	0,2767	0,2519
Thừa số phụ	$\frac{\bar{\rho}\lambda_y^4}{D}$	$\bar{\rho}\lambda_y$	$\frac{\bar{\rho}\lambda_y^2}{D}$	$\frac{\bar{\rho}\lambda_y^2}{D}$	$\bar{\rho}\lambda_y^2$	$\bar{\rho}\lambda_y^2$

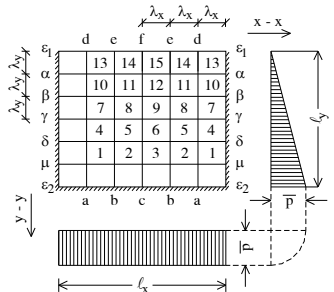
Trờng hợp 6b: Tấm chữ nhật bị ngâm ở 3 cạnh và tựa tự do ở cạnh thứ 4
 $l_y = 1,5l_x$



Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0,89308	0	- 0,3414	0,0569	0,3319	0
e	0,72236	0	- 0,2376	0,0396	0,2310	0
d	0,31401	0	0,0943	- 0,0157	- 0,0917	0
ϵ_1	0	0,515	0,6280	0	- 0,6280	- 0,1047
α	0	0,663	0,6335	0	- 0,6335	- 0,1056
β	0	0,811	0,6262	0	- 0,6262	- 0,1044
γ	0	0,903	0,5664	0	- 0,5664	- 0,0944
δ	0	0,851	0,4184	0	- 0,4184	- 0,0697
μ	0	0,581	0,1907	0	- 0,1907	- 0,0318
ϵ_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,937	0	0,4291	- 0,0715	- 0,4291
b	0	1,408	0	0,7912	- 0,1318	- 0,7912
c	0	1,547	0	0,9185	- 0,1531	- 0,9185
1	0,09535	-	- 0,0149	0,0416	0,0079	- 0,0391
2	0,17583	-	- 0,0522	0,1273	0,0310	- 0,1185
3	0,20412	-	- 0,0566	0,1659	0,0289	- 0,1565
4	0,20918	-	- 0,0102	- 0,0896	0,0251	0,0913
5	0,40820	-	- 0,1252	- 0,1393	0,1484	0,1602
6	0,48199	-	- 0,1476	- 0,1514	0,1728	0,1760
7	0,28319	-	0,0123	- 0,0992	0,0043	0,0972
8	0,57865	-	- 0,1815	- 0,1844	0,2122	0,2146
9	0,69258	-	- 0,2279	- 0,2135	0,2635	0,2515
10	0,31310	-	0,0410	- 0,0591	- 0,0311	0,0522
11	0,66716	-	- 0,2129	- 0,1224	0,2333	0,1579
12	0,80829	-	- 0,2823	- 0,1468	0,3067	0,1938
13	0,31676	-	- 0,0677	- 0,0144	0,0653	0,0031
14	0,70125	-	- 0,2270	- 0,0292	0,2318	0,0670
15	0,85875	-	- 0,3150	- 0,0363	0,3211	0,0888
Thừa số phụ	$\bar{p}\lambda_x^4 / D$	$\bar{p}\lambda_x$	$\bar{p}\lambda_x^2 / D$	$\bar{p}\lambda_x^2 / D$	$\bar{p}\lambda_x^2$	$\bar{p}\lambda_x^2$

Trờng hợp 7a: Tấm chữ nhật bị ngàm ở 3 cạnh
và cạnh thứ 4 tự do không tựa
 $1,5l_y = l_x$

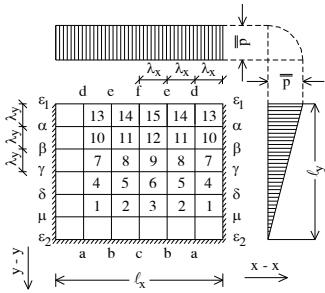


Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	1,80109	0	- 0,9929	0,1655	0,9654	0
e	2,30462	0	- 0,7360	0,1226	0,7155	0
d	1,07218	0	0,1602	- 0,0267	- 0,1558	0
ε_1	0	3,857	2,1444	0	- 2,1444	- 0,3574
α	0	2,046	1,7535	0	- 1,7535	- 0,2922
β	0	1,582	1,3487	0	- 1,3487	- 0,2247
γ	0	1,079	0,9266	0	- 0,9266	- 0,1544
δ	0	0,540	0,5105	0	- 0,5105	- 0,0851
μ	0	0,017	0,1643	0	- 0,1643	- 0,0274
ε_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,209	0	0,3695	- 0,0616	- 0,3695
b	0	0,739	0	0,8542	- 0,1432	- 0,8542
c	0	0,939	0	1,0525	- 0,1754	- 1,0525
1	0,08211	-	0,0256	0,2048	- 0,0597	- 0,2091
2	0,18983	-	- 0,0636	0,4251	- 0,0072	- 0,4145
3	0,28389	-	- 0,0881	0,5147	0,0023	0,5000
4	0,25526	-	0,0581	0,0785	- 0,0712	- 0,0882
5	0,56859	-	- 0,1854	0,1577	0,1591	- 0,1268
6	0,69654	-	- 0,2559	0,1883	0,2245	- 0,1456
7	0,46330	-	0,0909	0,0067	- 0,0920	- 0,0219
8	1,01747	-	- 0,3288	0,0046	0,3280	0,0502
9	1,24288	-	- 0,4508	0,0023	0,4505	0,0728
10	0,67433	-	0,1197	- 0,0194	- 0,1165	- 0,0005
11	1,46840	-	- 0,4722	- 0,0582	0,4819	0,1369
12	1,79024	-	- 0,6437	- 0,0754	0,6562	0,1827
13	0,87674	-	0,1400	- 0,0157	- 0,1337	- 0,0077
14	1,89347	-	- 0,6061	- 0,0313	0,6113	0,1323
15	2,30409	-	- 0,8212	- 0,0379	0,8270	0,1748
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda_x^4}{D}$	$\bar{p}\lambda_x$	$\frac{\bar{p}\lambda_x^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda_x^2}{D}$	$\bar{p}\lambda_x^2$	$\bar{p}\lambda_x^2$

Trờng hợp 7b: Tấm chữ nhật bị ngàm ở 3 cạnh
và cạnh thứ 4 tự do không tựa

$$1,5l_y = l_x$$

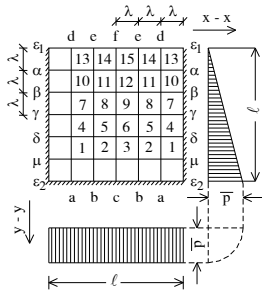


Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0,83852	0	- 0,3528	0,0588	0,3430	0
e	0,66213	0	- 0,2226	0,0371	0,2164	0
d	0,26317	0	0,1358	- 0,0226	- 0,1320	0
ϵ_1	0	0,269	0,5263	0	- 0,5263	- 0,0877
α	0	0,677	0,7036	0	- 0,7036	- 0,1173
β	0	0,993	0,8787	0	- 0,8787	- 0,1464
γ	0	1,251	0,9670	0	- 0,9670	- 0,1612
δ	0	1,294	0,8511	0	- 0,8511	- 0,1418
μ	0	0,928	0,4643	0	- 0,4643	- 0,0774
ϵ_2	0	0	0	0	0	0
a	0	1,011	0	0,4643	- 0,0774	- 0,4648
b	0	1,598	0	0,9117	- 0,1519	- 0,9117
c	0	1,769	0	1,0778	- 0,1796	- 1,0778
1	0,23215	-	- 0,0085	- 0,0388	0,0149	0,0402
2	0,45583	-	- 0,1406	- 0,0346	0,1464	0,0580
3	0,53890	-	- 0,1661	- 0,0255	0,1704	0,0532
4	0,42554	-	0,0260	- 0,1354	- 0,0034	0,1311
5	0,87705	-	- 0,2703	- 0,2638	0,3203	0,3098
6	1,05226	-	- 0,3504	- 0,3104	0,4022	0,3688
7	0,48350	-	0,0675	- 0,1021	- 0,0505	0,0909
8	1,03451	-	- 0,3303	- 0,2178	0,3666	0,2729
9	1,25520	-	- 0,4414	- 0,2635	0,4853	0,3371
10	0,43934	-	0,0955	- 0,0434	- 0,0882	0,0275
11	0,97415	-	- 0,3144	- 0,0987	0,3308	0,1511
12	1,19459	-	- 0,4409	- 0,1217	0,4612	0,1951
13	0,35181	-	0,1115	- 0,0011	- 0,1113	- 0,0175
14	0,81512	-	- 0,2661	0,0060	0,2651	0,0383
15	1,01231	-	- 0,3944	0,0085	0,3930	0,0572
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda^4}{D}$	$\bar{p}\lambda$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$

Trình hợp 8a: Tấm hình vuông bị ngàm ở 3 cạnh
và cạnh thứ 4 tự do không tựa

$$l_y = l_x = l$$

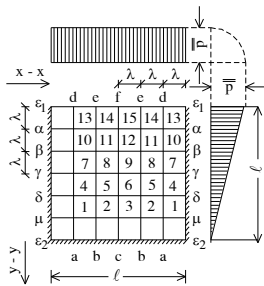


Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	3,48090	0	- 1,2931	0,2155	1,2571	0
e	2,83437	0	- 0,9162	0,1527	0,8908	0
d	1,27162	0	0,2911	- 0,0485	- 0,2830	0
ε_1	0	3,500	2,5432	0	- 2,5432	- 0,4239
α	0	2,320	2,1397	0	- 2,1397	0,3566
β	0	1,862	1,7142	0	- 1,7142	- 0,2857
γ	0	1,356	1,2435	0	- 1,2435	- 0,2072
δ	0	0,790	0,7369	0	- 0,7369	- 0,1228
μ	0	0,198	0,2630	0	- 0,2630	- 0,0438
ε_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,114	0	0,2630	- 0,0438	- 0,2630
b	0	0,192	0	0,6124	- 0,1021	- 0,6124
c	0	0,637	0	0,7593	- 0,1265	- 0,7593
1	0,13150	-	0,0432	0,1054	- 0,0608	- 0,1126
2	0,30620	-	- 0,1012	0,2216	0,0643	- 0,2048
3	0,37966	-	- 0,1469	0,2692	0,1020	- 0,2447
4	0,36844	-	0,0972	0,0164	- 0,0999	- 0,0325
5	0,83404	-	- 0,2711	0,0366	0,2650	0,0086
6	1,02856	-	- 0,3890	0,0446	0,3816	0,0203
7	0,62174	-	0,1550	- 0,0179	- 0,1520	- 0,0079
8	1,39845	-	- 0,4531	- 0,0409	0,4600	0,1164
9	1,72202	-	- 0,6471	- 0,0510	0,6556	0,1588
10	0,85710	-	0,2077	- 0,0226	- 0,2040	- 0,0120
11	1,92193	-	- 0,6222	- 0,0587	0,6320	0,1624
12	2,36453	-	- 0,8852	- 0,0744	0,8976	0,2219
13	1,06983	-	0,2471	- 0,0109	- 0,2453	- 0,0302
14	2,38675	-	- 0,7710	- 0,0172	0,7739	0,1457
15	2,93265	-	- 1,0918	- 0,0199	1,0951	0,2018
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda^4}{D}$	$\bar{p}\lambda$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$

Trờng hợp 8b: Tấm hình vuông bị ngàm ở 3 cạnh
và cạnh thứ 4 tự do không tựa

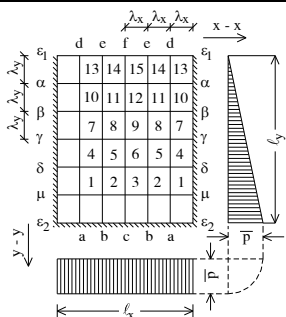
$$l_y = l_x = l$$



Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0,10694	0	- 0,1072	0,0179	0,1042	0
e	0,08312	0	- 0,0635	0,0106	0,0617	0
d	0,03109	0	0,0471	- 0,0078	- 0,0458	0
ε_1	0	- 0,026	0,1399	0	- 0,1399	- 0,0233
α	0	0,391	0,2772	0	- 0,2772	- 0,0462
β	0	0,687	0,4393	0	- 0,4393	- 0,0732
γ	0	0,979	0,5826	0	- 0,5826	- 0,0971
δ	0	1,149	0,6174	0	- 0,6174	- 0,1029
μ	0	0,957	0,4193	0	- 0,4193	- 0,0698
ε_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,720	0	0,1864	- 0,0310	- 0,1864
b	0	1,114	0	0,3869	- 0,0643	- 0,3869
c	0	1,245	0	0,4653	- 0,0774	- 0,4653
1	0,09319	-	0,0160	- 0,0492	- 0,0077	0,0465
2	0,19347	-	- 0,1375	- 0,0899	0,1525	0,1128
3	0,23264	-	0,0763	- 0,1036	0,1936	0,1330
4	0,13721	-	0,0509	- 0,0518	- 0,0423	0,0443
5	0,29705	-	- 0,2142	- 0,1128	0,2330	0,1485
6	0,36167	-	- 0,2908	- 0,1374	0,3137	0,1859
7	0,12946	-	0,0651	- 0,0241	- 0,0611	0,0132
8	0,28786	-	- 0,2092	- 0,0569	0,2187	0,0917
9	0,35328	-	- 0,2944	- 0,0710	0,3062	0,1200
10	0,09763	-	0,0596	- 0,0012	- 0,0589	- 0,0057
11	0,22176	-	- 0,1620	- 0,0111	0,1638	0,0381
12	0,27390	-	- 0,2346	- 0,0143	0,2370	0,0534
13	0,06159	-	0,0480	0,0055	- 0,0489	- 0,0135
14	0,14452	-	- 0,1062	0,0157	0,1036	0,0019
15	0,18023	-	- 0,1607	0,0204	0,1573	0,0064
Thừa số phụ	$\frac{\bar{\rho}\lambda_y^4}{D}$	$\bar{\rho}\lambda_y$	$\frac{\bar{\rho}\lambda_y^2}{D}$	$\frac{\bar{\rho}\lambda_y^2}{D}$	$\bar{\rho}\lambda_y^2$	$\bar{\rho}\lambda_y^2$

Trờng hợp 9a: Tấm chữ nhật bị ngàm ở 3 cạnh
và cạnh thứ 4 tự do không tựa
 $\ell_y = 1,5\ell_x$

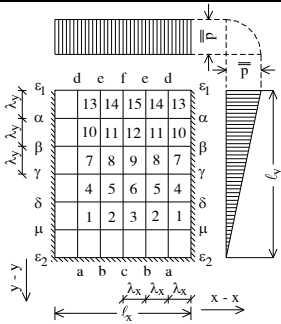


Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
f	0,74970	0	- 0,6391	0,1065	0,6214	0
e	0,60767	0	- 0,4442	0,0740	0,4318	0
d	0,26824	0	0,1602	- 0,0267	- 0,1557	0
ε_1	0	2,135	1,2071	0	- 1,2071	- 0,2012
α	0	1,612	1,0229	0	- 1,0229	- 0,1705
β	0	1,310	0,8339	0	- 0,8339	- 0,1390
γ	0	0,982	0,6248	0	- 0,6248	- 0,1041
δ	0	0,624	0,3952	0	- 0,3952	- 0,0659
μ	0	0,235	0,1604	0	- 0,1604	- 0,0267
ε_2	0	0	0	0	0	0
a	0	0,031	0	0,0713	- 0,0119	- 0,0713
b	0	0,188	0	0,1639	- 0,0273	- 0,1639
c	0	0,247	0	0,2030	- 0,0338	- 0,2030
1	0,3565	-	0,0240	0,0165	- 0,0268	- 0,0205
2	0,08197	-	- 0,0602	0,0358	0,0543	- 0,0257
3	0,10152	-	- 0,0880	0,0437	0,0807	- 0,0291
4	0,08783	-	0,0542	- 0,0012	0,0540	- 0,0079
5	0,19973	-	- 0,1459	- 0,0019	0,1462	0,0262
6	0,24678	-	- 0,2117	- 0,0022	0,2122	0,0374
7	0,13884	-	0,0853	- 0,0045	- 0,0845	- 0,0097
8	0,31558	-	- 0,2305	- 0,0106	0,2323	0,0490
9	0,38988	-	0,3343	- 0,0132	0,3365	0,0690
10	0,18531	-	0,1130	- 0,0044	- 0,1122	- 0,0144
11	0,42083	-	- 0,3074	- 0,0118	0,3093	0,6630
12	0,51974	-	- 0,4451	- 0,0150	0,4477	0,0892
13	0,22732	-	0,1343	- 0,0011	- 0,1341	- 0,0213
14	0,51432	-	- 0,3752	- 0,0001	0,3752	0,0627
15	0,63456	-	- 0,5411	- 0,0003	0,5410	0,0899
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda_y^4}{D}$	$\bar{p}\lambda_y$	$\frac{\bar{p}\lambda_y^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda_y^2}{D}$	$\bar{p}\lambda_y^2$	$\bar{p}\lambda_y^2$

Trờng hợp 9b: Tấm chữ nhật bị ngâm ở 3 cạnh
và cạnh thứ 4 tự do không tựa

$$l_y = 1,5l_x$$

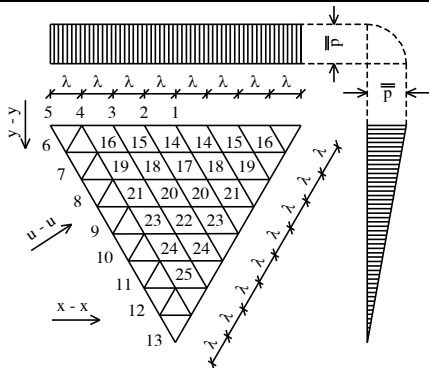


Bảng 2.6.2 (tiếp)

		<p>Trờng hợp 10a: Tấm hình tam giác đều tựa tự do trên toàn chu vi</p>				
Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
1	0	0,409	0	0	0	0
2	0	0,351	0	0	0	0
3	0	0,189	0	0	0	0
4	0	-0,018	0	0	0	0
5	0	-0,123	0	0	0	0
6	0	0,027	0,1279	-0,1279	-0,1066	0,1066
7	0	0,300	0,1848	-0,1848	-0,1540	0,1540
8	0	0,590	0,1585	-0,1585	-0,1321	0,1321
9	0	0,866	0,0594	-0,0594	-0,0495	0,0495
10	0	0,953	-0,0824	0,0824	0,0686	-0,0686
11	0	0,877	-0,2119	0,2119	0,1766	-0,1766
12	0	0,478	-0,2364	0,2364	0,1970	-0,1970
13	0	-0,227	0	0	0	0
14	0,40440	-	-0,1107	-0,1521	0,1361	0,1705
15	0,29368	-	-0,0551	-0,1510	0,0802	0,1602
16	0,12790	-	0,0379	-0,1452	-0,0137	0,1389
17	0,82617	-	-0,2364	-0,2557	0,2790	0,2951
18	0,60796	-	-0,1770	-0,2513	0,2189	0,2808
19	0,31273	-	-0,0175	-0,2329	0,0563	0,2353
20	0,79707	-	-0,3259	-0,2718	0,3712	0,3261
21	0,47120	-	-0,1453	-0,2405	0,1854	0,2648
22	0,75283	-	-0,4444	-0,1990	0,4776	0,2730
23	0,53064	-	-0,3084	-0,1679	0,3364	0,2193
24	0,44827	-	-0,4483	-0,0327	0,4537	0,1074
25	0,23638	-	-0,4728	0,1249	0,4519	-0,0464
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda^4}{D}$	$\bar{p}\lambda$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$

Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán					
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{xx}	M_{yy}
1	0	1,661	0	0	0	0
2	0	1,544	0	0	0	0
3	0	1,177	0	0	0	0
4	0	0,506	0	0	0	0
5	0	-0,350	0	0	0	0
6	0	0,460	0,3643	-0,3643	-0,3036	0,3036
7	0	1,066	0,3777	-0,3777	-0,3147	0,3147
8	0	1,304	0,1931	-0,1931	-0,1609	0,1609
9	0	1,204	-0,0594	0,0594	0,0495	-0,0495
10	0	0,940	-0,2692	0,2692	0,2243	-0,2243
11	0	0,489	-0,3506	0,3506	0,2922	-0,2922
12	0	0,009	-0,2558	0,2558	0,2132	-0,2132
13	0	-0,246	0	0	0	0
14	1,00184	-	-0,2408	-0,6214	0,3444	0,6615
15	0,76100	-	-0,1559	-0,5755	0,2518	0,6015
16	0,36428	-	0,0324	-0,4876	0,0488	0,4822
17	1,59414	-	-0,4667	-0,7287	0,5881	0,8065
18	1,36079	-	-0,3850	-0,6862	0,4998	0,7504
19	0,74195	-	-0,1231	-0,5639	0,2171	0,5845
20	1,52324	-	-0,5882	-0,5016	0,6718	0,5996
21	0,93505	-	-0,3468	-0,3923	0,4122	0,4501
22	1,21592	-	-0,6806	-0,1760	0,7100	0,2895
23	0,87561	-	-0,5353	-0,1134	0,5542	0,2026
24	0,60642	-	-0,6064	0,1499	0,5814	-0,0488
25	0,25581	-	-0,5116	0,2969	0,4621	-0,2117
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda^4}{D}$	$\bar{p}\lambda$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$



Trờng hợp 10b: Tấm hình tam giác đều
tựa tự do trên toàn chu vi

Bảng 2.6.2 (tiếp)

Tr ờng hợp 11a: Tấm hình tam giác đều bị ngàm ở 2 cạnh và tự do ở cạnh thứ 3

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán						
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{uu}	M_{xx}	M_{yy}
1	0	0,253	0	0	-	0	0
2	0	0,194	0	0	-	0	0
3	0	0,078	0	0	-	0	0
4	0	-0,069	0	0	-	0	0
5	0	-0,041	0	0	0	0	0
6	0	0,126	0,0427	0,0142	-0,0569	-0,0451	-0,0213
7	0	0,369	0,1537	0,0512	-0,2050	-0,1623	-0,0769
8	0	0,651	0,2815	0,0938	-0,3753	-0,2971	-0,1408
9	0	0,869	0,3612	0,1204	-0,4816	-0,3813	-0,1806
10	0	0,942	0,3466	0,1155	-0,4621	-0,3658	-0,1733
11	0	0,815	0,2317	0,0772	-0,3089	-0,2416	-0,1158
12	0	0,551	0,0759	0,0252	-0,1012	-0,0801	-0,0379
13	0	0	0	0	0	0	0
14	0,19923	-	-0,0690	-0,0925	-	0,0844	0,1040
15	0,13020	-	0,0185	-0,0840	-	0,0324	0,0871
16	0,04271	-	0,0448	-0,0548	-	-0,0356	0,0473
17	0,34902	-	-0,0489	-0,1456	-	0,1732	0,1705
18	0,27456	-	-0,0891	-0,1343	-	0,1114	0,1791
19	0,11104	-	0,0525	-0,0847	-	-0,0384	0,0759
20	0,35235	-	-0,1819	-0,1294	-	0,2034	0,1597
21	0,17047	-	0,0114	-0,0742	-	0,0010	0,0728
22	0,31006	-	-0,2386	-0,0697	-	0,2502	0,1095
23	0,19076	-	-0,0715	-0,0324	-	0,0709	0,0444
24	0,15581	-	-0,1558	0,0209	-	0,1523	0,0051
25	0,07583	-	-0,1518	0,0560	-	0,1424	-0,0307
Thừa số phụ	$\frac{\bar{p}\lambda^4}{D}$	$\bar{p}\lambda$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\frac{\bar{p}\lambda^2}{D}$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$

Bảng 2.6.2 (tiếp)

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán						
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{uu}	M_{xx}	M_{yy}
1	0	1,359	0	0	-	0	0
2	0	1,220	0	0	-	0	0
3	0	0,827	0	0	-	0	0
4	0	0,284	0	0	-	0	0
5	0	-0,163	0	0	0	0	0
6	0	0,745	0,1697	0,0566	-0,2262	-0,1791	-0,0848
7	0	1,279	0,4900	0,1633	-0,6534	-0,5173	-0,2450
8	0	0,477	0,6866	0,2289	-0,9155	-0,7247	-0,3433
9	0	1,318	0,6642	0,2214	-0,8856	-0,7011	-0,3321
10	0	0,896	0,4612	0,1537	-0,6149	-0,4868	-0,2306
11	0	0,396	0,2056	0,0685	-0,2741	-0,2170	-0,1028
12	0	0,092	0,0424	0,141	-0,0565	-0,0448	-0,0212
13	0	0	0	0	0	0	0
14	0,60141	-	-0,1765	-0,4787	-	0,2563	0,581
15	0,42489	-	-0,0787	-0,4158	-	0,1480	0,4289
16	0,16966	-	0,0856	-0,2674	-	-0,4100	0,2531
17	0,88314	-	-0,3339	-0,4814	-	0,4142	0,5372
18	0,71617	-	-0,2288	-0,4250	-	0,2996	0,4631
19	0,32037	-	0,0754	-0,2390	-	-0,0356	0,2264
20	0,32033	-	-0,3541	-0,2204	-	0,3908	0,2794
21	0,36621	-	-0,0121	-0,0828	-	0,0259	0,0848
22	0,47637	-	-0,3567	0,0266	-	0,3522	0,329
23	0,19803	-	-0,1197	0,0783	-	0,1066	-0,0584
24	0,16318	-	-0,1632	0,1638	-	0,1359	-0,1366
25	0,04241	-	-0,0848	0,1327	-	0,0627	-0,1186
Thừa số phụ	$\bar{p}\lambda^4 / D$	$\bar{p}\lambda$	$\bar{p}\lambda^2 / D$	$\bar{p}\lambda^2 / D$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^4 / D$

Trờng hợp 11b: Tấm hình tam giác đều bị ngàm ở 2 cạnh và tự do ở cạnh thứ 3

Bảng 2.6.2 (tiếp)

The diagram shows a triangular mesh with 25 nodes numbered 1 to 25. Node 1 is at the top vertex, and nodes 13, 14, 15, 16 form the bottom edge. A trapezoidal load distribution is shown on the right, with a peak value \bar{p} at the top and zero at the bottom. The mesh is defined by a coordinate system (x, y) and a horizontal distance λ between nodes.

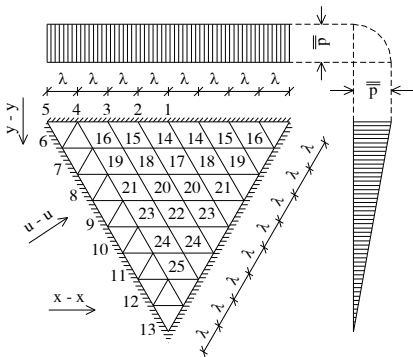
Tr ờng hợp 12a: Tấm hình tam giác đều bị ngâm ở toàn chu vi

Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán						
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{uu}	M_{xx}	M_{yy}
1	0	0,345	0	0,2891	—	- 0,0482	- 0,2891
2	0	0,281	0	0,2367	—	- 0,0394	- 0,2367
3	0	0,132	0	0,1202	—	- 0,0200	- 0,1202
4	0	0,007	0	0,0280	—	- 0,0047	- 0,0280
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0,061	0,0210	0,0070	- 0,0280	- 0,0221	- 0,0105
7	0	0,271	0,1006	0,0335	- 0,1341	- 0,1062	- 0,0503
8	0	0,565	0,2239	0,0745	- 0,2985	- 0,2363	- 0,1119
9	0	0,819	0,3204	0,1068	- 0,4271	- 0,3382	- 0,1602
10	0	0,926	0,3272	0,1091	- 0,4361	- 0,3454	- 0,1636
11	0	0,816	0,2208	0,0756	- 0,3025	- 0,2694	- 0,1134
12	0	0,496	0,0757	0,0252	- 0,1010	- 0,0790	- 0,0379
13	0	0	0	0	0	0	0
14	0,10840	—	- 0,0393	0,0297	—	0,0343	- 0,0232
15	0,06914	—	- 0,0089	0,0058	—	0,0080	- 0,0048
16	0,02098	—	0,0272	- 0,0119	—	- 0,0252	0,0074
17	0,25736	—	- 0,1124	- 0,1048	—	0,1298	0,1235
18	0,20117	—	- 0,0655	- 0,1004	—	0,0821	0,1113
19	0,07962	—	0,0419	- 0,0700	—	- 0,0303	0,0630
20	0,29962	—	- 0,1553	- 0,1334	—	0,1776	0,1593
21	0,14427	—	0,0111	- 0,0838	—	0,0029	0,0820
22	0,28610	—	- 0,2200	- 0,0886	—	0,2348	0,1253
23	0,17610	—	- 0,0661	- 0,0509	—	0,0746	0,0619
24	0,15113	—	- 0,1511	0,0060	—	0,1501	0,0192
25	0,07573	—	- 0,1541	0,0500	—	0,1431	- 0,0248
Thừa số phụ	$\bar{p}\lambda^4 / D$	$\bar{p}\lambda$	$\bar{p}\lambda^2 / D$	$\bar{p}\lambda^2 / D$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$	$\bar{p}\lambda^2$

Bảng 2.6.2 (tiếp)

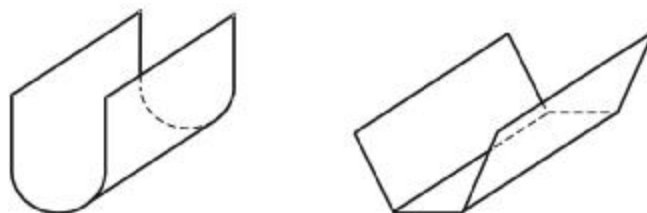
Điểm tính toán	Các đại lượng tính toán						
	w	Q	W_{xx}	W_{yy}	M_{uu}	M_{xx}	M_{yy}
1	0	1,638	0	0,8543	—	-0,1424	-0,8543
2	0	1,491	0	0,7348	—	-0,1225	-0,7348
3	0	1,087	0	0,4366	—	-0,0728	-0,4366
4	0	0,557	0	0,1289	—	-0,0215	-0,1289
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0,503	0,0967	-0,0322	-0,1289	-0,1021	-0,0483
7	0	0,948	0,3170	0,1057	-0,4226	-0,3346	-0,1585
8	0	1,206	0,5048	0,1683	-0,6730	-0,5328	-0,2524
9	0	1,164	0,5372	0,1791	-0,7162	-0,5670	-0,2686
10	0	0,846	0,4014	0,1338	-0,5352	-0,4237	-0,2007
11	0	0,402	0,1907	0,0636	-0,2534	-0,2013	-0,0954
12	0	0,069	0,0420	0,0140	-0,0560	-0,0443	-0,0210
13	0	0	0	0	0	0	0
14	0,32036	—	-0,0896	-0,1001	—	0,1063	0,1450
15	0,23075	—	-0,0444	-0,1288	—	0,0659	0,1362
16	0,09671	—	0,0373	-0,1235	—	-0,0168	0,1173
17	0,59925	—	-0,2240	-0,3535	—	0,2809	0,3909
18	0,48728	—	-0,1550	-0,3193	—	0,2082	0,3452
19	0,22027	—	0,0467	-0,1950	—	-0,0142	0,1872
20	0,55699	—	-0,2725	-0,2334	—	0,3114	0,2788
21	0,28450	—	-0,0120	-0,1145	—	0,0311	0,1165
22	0,40235	—	-0,2994	-0,0321	—	0,3047	0,0820
23	0,25367	—	-0,1030	0,0207	—	0,0995	-0,0035
24	0,14877	—	-0,1488	0,1175	—	0,1292	-0,0927
25	0,01196	—	-0,0839	0,1144	—	0,0649	-0,1005
Thừa số phụ	$\bar{\rho}\lambda^4/D$	$\bar{\rho}\lambda$	$\bar{\rho}\lambda^2/D$	$\bar{\rho}\lambda^2/D$	$\bar{\rho}\lambda^2$	$\bar{\rho}\lambda^2$	$\bar{\rho}\lambda^4/D$

Trờng hợp 12b: Tấm hình tam giác đều bị ngàm ở toàn chu vi



2.6.6. Vỏ mỏng đàn hồi

2.6.6.1. Khái niệm và giả thiết tính toán



Hình 2.6.16: Vỏ mỏng

Vỏ mỏng là kết cấu có dạng mặt cong hoặc gấp khúc, trong đó tỷ lệ giữa bề dày h của mặt vỏ và kích thước cạnh ngắn nhất b của vỏ nằm trong phạm vi:

$$\left(\frac{1}{200} < \frac{h}{b} < \frac{1}{8} \right)$$

Cũng như tấm, mặt chia đôi chiều dày của vỏ được gọi là *mặt trung bình* của vỏ. Khác với tấm, dưới tác dụng của tải trọng có phương vuông góc với mặt vỏ trong vỏ xuất hiện hai loại nội lực (hình 2.6.16):

- + *Nội lực màng*: là lực kéo hoặc nén và lực gây trượt có phương tiếp tuyến với mặt trung bình của vỏ, thường ký hiệu là N_x , N_y và N_{xy} .
- + *Nội lực uốn*: là mô men uốn, mô men xoắn và lực cắt thường ký hiệu là M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y .

Tuy vậy, không phải lúc nào hai loại nội lực trên cũng có giá trị đáng kể. Tùy thuộc vào dạng mặt vỏ, vào dạng tải trọng và liên kết v.v... có trường hợp nội lực uốn có giá trị rất nhỏ, vỏ hầu như không chịu uốn, chỉ chịu kéo hoặc nén. Vỏ chỉ có nội lực màng được gọi là *vỏ không mô men*, còn vỏ có cả nội lực màng lẫn nội lực uốn được gọi là *vỏ mô men*. Chẳng hạn, với vỏ có dạng tròn xoay chịu tải trọng đối xứng trục thì bộ phận vỏ ở đủ xa vị trí liên kết hoặc các nẹp gia cố có thể xem là vỏ không mô men, còn bộ phận vỏ ở gần vị trí liên kết hoặc các nẹp gia cố được xem là vỏ mô men.

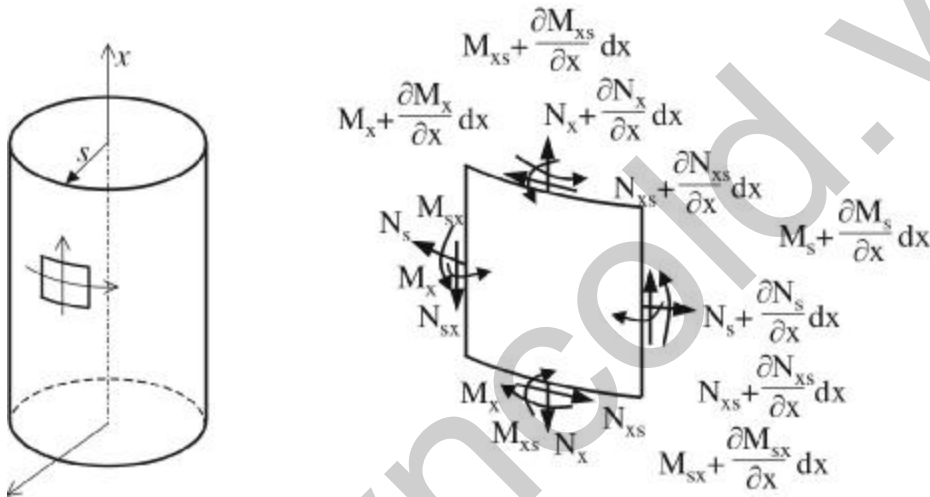
Để xây dựng phương trình vi phân tính vỏ mỏng cũng đưa vào một số giả thiết gần đúng về ứng xử của vật liệu và biến dạng, cụ thể là:

- + Vật liệu vỏ tuân theo định luật Húc.
- + Chuyển vị của vỏ do biến dạng gây ra rất nhỏ so với kích thước của vỏ.
- + Pháp tuyến của mặt trung bình của vỏ trước biến dạng vẫn giữ vuông góc với mặt trung bình của vỏ sau khi bị biến dạng (định luật Kiết khớp).

Vỏ có độ cong của mặt vỏ nhỏ được gọi là *vỏ thoải*. Với loại vỏ này các số hạng bậc cao liên quan đến độ cong của vỏ có thể bỏ qua nên phương trình tính đơn giản hơn so với những vỏ có độ cong lớn.

Lý thuyết tổng quát để tính toán vỏ rất phức tạp. Nhằm đơn giản cho việc ứng dụng với từng dạng vỏ và từng trường hợp chịu tải đã thiết lập các phương trình hoặc công thức tính toán riêng. Dưới đây trình bày một số trường hợp đơn giản thường gặp.

2.6.6.2. Vỏ trụ tròn kín



Hình 2.6.17: Nội lực tác dụng trên một phần tử của vỏ trụ tròn kín

1. Phương trình cơ bản

+ Phương trình cân bằng biểu diễn quan hệ giữa nội lực và tải trọng tác dụng trên bề mặt của vỏ

$$\frac{\partial N_x}{\partial \alpha} - \frac{\partial N_{sy}}{\partial \beta} + R p_x = 0$$

$$-\frac{\partial N_{xs}}{\partial \alpha} - \frac{\partial N_s}{\partial \beta} - Q_s + R p_y = 0$$

$$N_s + \frac{\partial Q_s}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_s}{\partial \beta} + R p_v = 0 \quad (2.6.50)$$

$$\frac{\partial M_{xs}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_s}{\partial \alpha} + Q_s R = 0$$

$$\frac{\partial M_{sx}}{\partial \beta} + \frac{\partial M_x}{\partial \alpha} - Q_x R = 0$$

trong đó:

$x(\alpha)$, $s(\beta)$, v - phương đường sinh, phương tiếp tuyến với chu vi và phương pháp tuyến với mặt vỏ;

p_x , p_s , p_v - cường độ tải trọng phân bố theo phương dọc trục (đường sinh), phương tiếp tuyến với chu vi (vuông góc với đường sinh) và phương pháp tuyến với mặt vỏ;

R - bán kính trụ.

+ Phương trình hình học biểu diễn quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \varepsilon_s &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - w \right) \\ \varepsilon_{xs} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ \chi_x &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \\ \chi_s &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + v \right) \\ \chi_{xs} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + v \right)\end{aligned}\quad (2.6.51)$$

trong đó:

u , v , w - chuyển vị của điểm bất kỳ trên mặt trung bình theo phương của các trục tọa độ;

ε_x , ε_s , ε_{xs} - biến dạng thẳng và biến dạng góc trong mặt phẳng trung bình;

χ_x , χ_s , χ_{xs} - biến dạng uốn (độ cong của mặt vỏ) và biến dạng xoắn.

+ Phương trình liên tục biến dạng

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi_s}{\partial \alpha} - \frac{\partial \chi_{xs}}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial \chi_s}{\partial \beta} - \frac{\partial \chi_{xs}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varepsilon_x}{R \partial \beta} + \frac{\partial \varepsilon_{xs}}{R \partial \alpha} &= 0 \\ \frac{\chi_x}{R} - \frac{\partial}{R^2 \partial \alpha} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xs}}{\partial \beta} - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{R^2 \partial \beta} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xs}}{\partial \alpha} \right) &= 0\end{aligned}\quad (2.6.52)$$

+ Phương trình vật lý biểu diễn quan hệ giữa nội lực và biến dạng

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Et}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_s) \\
 N_y &= \frac{Et}{1-\mu^2}(\varepsilon_s + \mu\varepsilon_x) \\
 N_{xs} &= \frac{Et}{2(1+\mu)}\varepsilon \\
 M_x &= \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}(\chi_x + \mu\chi_s) \\
 M_s &= \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}(\chi_s + \mu\chi_x) \\
 M_{xs} &= -M_{sx} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\chi_{xs}
 \end{aligned} \tag{2.6.53}$$

trong đó:

t - bề dày của vỏ;

E, μ - mô đun đàn hồi và hệ số Poát-xông của vật liệu vỏ.

2. Vỏ trụ chịu tác dụng của tải trọng đối xứng trục

a. Lý thuyết không mô men

Phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_x}{d\alpha} + Rp_x &= 0 \\
 N_s + Rp_y &= 0
 \end{aligned} \tag{2.6.54}$$

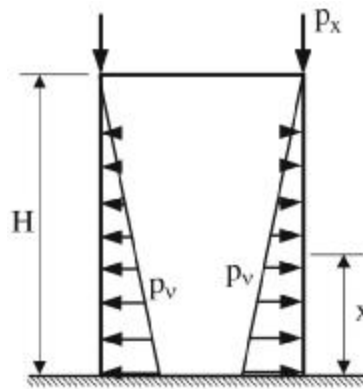
Từ hai phương trình này dễ dàng xác định lực dọc theo phương dọc trục N_x và lực dọc theo phương hướng vòng N_s của vỏ dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều p_x theo phương dọc trục và tải trọng phân bố bậc nhất p_y theo phương vuông góc với mặt. Ví dụ với vỏ chịu tác dụng của trọng lượng bản thân và áp lực thủy tĩnh bên trong (hình 2.6.18):

$$\begin{aligned}
 N_x &= \gamma(H-x) \\
 N_s &= \gamma_n(H-x)R
 \end{aligned}$$

trong đó:

γ - trọng lượng riêng của vật liệu vỏ;

γ_n - trọng lượng riêng của nước.



Hình 2.6.18: Vỏ trụ chịu tải trọng đối xứng trục

b. Lý thuyết mô men

+ Phương trình vi phân độ võng

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\eta^4 w = \frac{1}{D} \left(p_v + \mu \frac{N_x}{R} \right) \quad (2.6.55)$$

trong đó:

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 t^2}} \quad (2.6.56)$$

$$D = \frac{Et^3}{(1-\mu^2)}$$

+ Nghiệm của phương trình

$$w = e^{\eta x} (C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x) + e^{-\eta x} (C_3 \cos \eta x + C_4 \sin \eta x) + f(x) \quad (2.6.57)$$

trong đó:

C_1, C_2, C_3, C_4 - hằng số tích phân xác định từ điều kiện biên;

$f(x)$ - nghiệm riêng xác định từ dạng của tải trọng tác dụng trên mặt trụ.

+ Điều kiện biên ở hai đầu vỏ

- Ngàm: Góc xoay $\varphi_x = 0$; Độ võng $w = 0$.
- Tựa khớp: Độ võng $w = 0$; Mô men uốn $M_x = 0$.
- Tự do: Lực cắt $Q_x = 0$; Mô men uốn $M_x = 0$.

$$(2.6.58)$$

+ Công thức tính nội lực

$$\begin{aligned}
 N_x &= C + \int p_x dx \\
 N_s &= \frac{1}{1-\mu^2} \left(\mu N_x - w \frac{Et}{R} \right) \\
 M_x &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} \\
 M_s &= \mu M_x \\
 Q_x &= D \frac{d^3 w}{dx^3}
 \end{aligned} \tag{2.6.59}$$

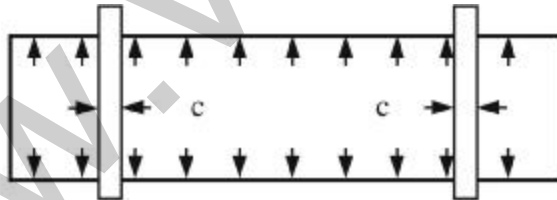
+ Lời giải cho một số bài toán

- Vỏ trụ chịu áp lực thủy tĩnh bên trong vỏ (hình 2.6.18)

$$\begin{aligned}
 N_x &= \mu RH \left[1 - \frac{x}{H} - e^{-\eta x} \cos \eta x - \left(1 - \frac{1}{\eta H} \right) e^{-\eta x} \sin \eta x \right] \\
 M_x &= \frac{\mu R t H}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left[-e^{-\eta x} \sin \eta x - \left(1 - \frac{1}{\eta H} \right) e^{-\eta x} \cos \eta x \right]
 \end{aligned} \tag{2.6.60}$$

Chú ý là kết quả này chỉ áp dụng với vỏ có $H \geq 3\sqrt{Rt}$.

- Vỏ trụ có đai gia cường chịu áp lực đều bên trong (hình 2.6.19)



Hình 2.6.19: Vỏ trụ có đai gia cường

Mô men uốn và lực cắt tại vị trí sát mép đai:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 0,304 p_v R t \frac{F_K - ct}{F_K + 1,56t\sqrt{Rt}} \\
 Q_0 &= 0,78 p_v \sqrt{Rt} \frac{F_K - ct}{F_K + 1,56t\sqrt{Rt}}
 \end{aligned} \tag{2.6.61}$$

trong đó:

F_K - diện tích mặt cắt ngang của đai;

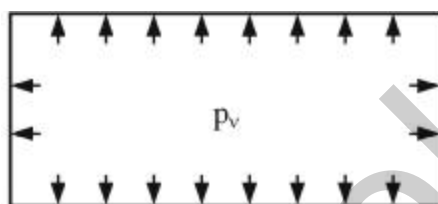
c - chiều rộng của đai.

Lực dọc trong đai:

$$N = p_v R \frac{c + \frac{2}{\eta}}{1 + \frac{2t}{\eta F_K}} \quad (2.6.62)$$

Chú ý là công thức tính lực dọc trong đai chỉ được áp dụng khi khoảng cách giữa các đai $\geq \frac{4}{\eta}$.

- Vỏ trụ kín chịu áp lực đều bên trong (hình 2.6.20)



Hình 2.6.20. Vỏ trụ kín chịu áp lực đều bên trong

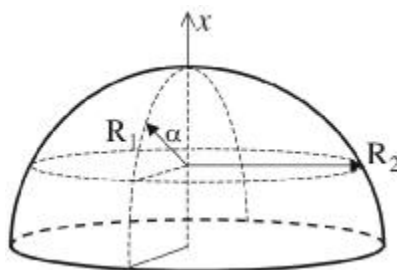
Nội lực tại mặt cắt tiếp giáp đáy ở hai đầu

$$M_0 = \frac{\frac{p_v R^3 \eta^2 D}{4D_d(1+\mu)} + \frac{2p_v R^2 \eta^3 Et_d D}{Et \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) [Et_d + 2RD\eta^3(1-\mu)]}}{2\eta + \frac{2R\eta^2 D}{D_d(1+\mu)} - \frac{\eta Et_d}{Et_d + 2D_d\eta^3 R(1-\mu)}} \quad (2.6.63)$$

$$Q_0 = M_0 \left[2\eta + \frac{2R\eta^2 D}{D_d(1+\mu)} \right] - \frac{p_v R^3 \eta^2 D}{4D_d(1+\mu)}$$

trong đó: D_d, t_d là độ cứng trụ và bề dày của đáy.

2.6.6.3. Vỏ tròn xoay chịu tác dụng của tải trọng đối xứng trục



Hình 2.6.21: Vỏ tròn xoay chịu tải trọng đối xứng trục

1. Nội lực của vỏ

a. Lý thuyết vỏ không mô men

+ Công thức tính nội lực

$$N_1 = \frac{Q_z}{2\pi r \sin \alpha} \quad (2.6.64)$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = 0$$

trong đó:

R_1 - bán kính cong theo phương đường sinh (kinh tuyến);

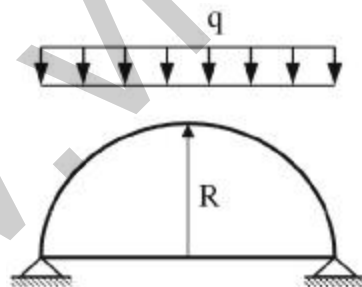
R_2 - bán kính cong theo phương vuông góc với đường sinh (vĩ tuyến);

α - góc hợp bởi giữa pháp tuyến của mặt vỏ với trục xoay của mặt vỏ;

Q_z - tổng hợp lực theo phương trục vỏ của tải trọng tác dụng phía trên mặt cắt tính nội lực xác định bằng công thức:

$$Q_z = \int_0^z 2\pi r p_z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz \quad (2.6.65)$$

+ Vỏ cầu chịu tải phân bố đều thẳng đứng (hình 2.6.22)



Hình 2.6.22: Vỏ cầu chịu lực phân bố đều thẳng đứng

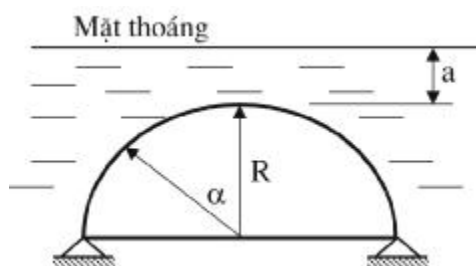
$$N_1 = \frac{1}{2} p_z R \quad (2.6.66)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} p_z R \cos 2\alpha$$

Lực xô ngang tại gối tựa:

$$H = \frac{1}{2} p_z R \cos \alpha \quad (2.6.67)$$

+ Vỏ cầu nằm trong dịch thể (hình 2.6.23)



Hình 2.6.23: Vỏ cầu nằm trong dịch thể

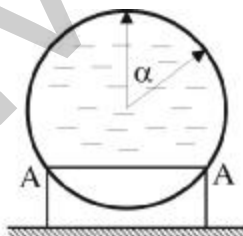
$$N_1 = \frac{\gamma R}{2} \left[a + R - \frac{2R(1 - \cos^3 \alpha)}{3 \sin^2 \alpha} \right] \quad (2.6.68)$$

$$N_2 = \gamma R \left[\frac{1}{2}(a + R) + R \left(\frac{1 - \cos^3 \alpha}{3 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \right]$$

Lực xô ngang tại gối tựa:

$$H = N_1 \cos \alpha \quad (2.6.69)$$

+ Vỏ cầu chứa đầy dịch thể (hình 2.6.24)



Hình 2.6.24: Vỏ cầu chứa đầy dịch thể

- Phía trên vành đỡ A-A

$$N_1 = \frac{\gamma R^2}{6} \left(1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right) \quad (2.6.70)$$

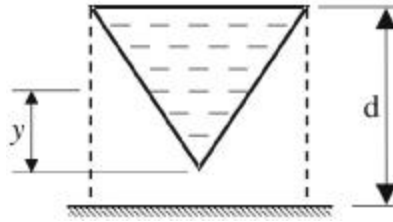
$$N_2 = \frac{\gamma R^2}{6} \left(5 - 6 \cos \alpha + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)$$

- Phía dưới vành đỡ A-A

$$N_1 = \frac{\gamma R^2}{6} \left(5 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)$$

$$N_2 = \frac{\gamma R^2}{6} \left(1 - 6 \cos \alpha - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)$$
(2.6.71)

+ Vỏ nón chứa đầy dịch thể (hình 2.6.25)



Hình 2.6.25: Vỏ nón chứa đầy dịch thể

$$N_1 = \frac{\gamma y \left(d - \frac{2}{3} y \right) \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \alpha}$$

$$N_2 = \frac{\gamma (d - y) y \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$$
(2.6.72)

b. Lý thuyết vỏ mô men

Tại vị trí gần vòng đỡ xuất hiện mô men uốn, song giá trị của mô men tắt rất nhanh. Nội lực của vỏ ở vị trí này phụ thuộc vào độ cứng của vòng đỡ. Trường hợp độ cứng của vòng rất lớn (tuyệt đối cứng) nội lực được tính bằng công thức:

$$N_1 = N_K \frac{R_1 \cot \alpha}{\sqrt{2} R_2 k \sin \left(\delta + \frac{\pi}{4} \right)} e^{-k\omega} \cos(k\omega + \delta)$$

$$N_2 = N_K \frac{e^{-k\omega}}{\sin \left(\delta + \frac{\pi}{4} \right)} \sin \left(k\omega + \delta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$M_1 = -N_K \frac{R_1^2}{2 R_2 k^2 \sin \left(\delta + \frac{\pi}{4} \right)} e^{-k\omega} \cos \left(k\omega + \delta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$M_2 = D \frac{\cot \alpha}{R_2} N_K \frac{R_2 \sqrt{2}}{R t R_1 \sin \left(\delta + \frac{\pi}{4} \right)} k e^{-k\omega} \sin(k\omega + \delta)$$
(2.6.73)

trong đó:

δ - giá trị phụ thuộc vào điều kiện liên kết của vỏ vào vòng,

Nếu hàn chặt $\delta = 0$,

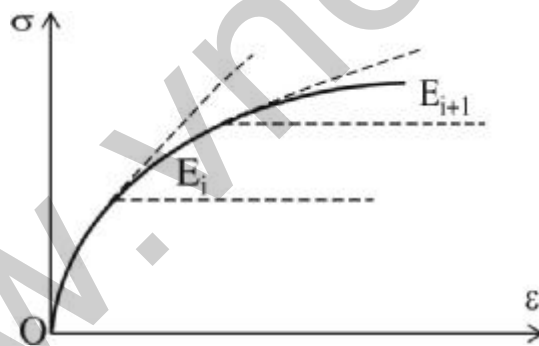
Nếu nối khớp bản lề $\delta = \frac{\pi}{4}$;

k - hệ số tắt dần xác định bằng công thức:

$$k = R_1^4 \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{R_2^2 t^2}} \quad (2.6.74)$$

2.6.7. Vật liệu đàn hồi phi tuyến

Một số vật liệu như đất, đá... hầu như không có khả năng chịu kéo, còn khi chịu nén quan hệ giữa ứng suất và biến dạng không còn tuân theo định luật Húc. Trường hợp chịu nén dọc trục quan hệ này có dạng đường cong gần với dạng đường hypecbôn như ở hình 2.6.26. Theo Dun-can & Chang vật liệu đàn hồi phi tuyến có mô đun đàn hồi và hệ số Poát-xông đều là hàm của ứng suất và được gọi là mô đun tiếp tuyến và hệ số Poát-xông tiếp tuyến.



Hình 2.6.26: Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật liệu đàn hồi phi tuyến

Mô hình Dun-can & Chang được sử dụng khá rộng rãi để tính toán đập đất đập hoặc đập đá đổ. Mô đun tiếp tuyến và hệ số Poát-xông tiếp tuyến của vật liệu ứng với giá trị ứng suất σ_1 , σ_3 bất kỳ được xác định bằng công thức:

$$E_i = E_0 \left[1 - \frac{R(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right]^2 \quad (2.6.75)$$

$$\mu_t = \frac{\mu_i}{(1 - D\varepsilon)} \quad (2.6.76)$$

trong đó:

$$E_0 - \text{mô đun ban đầu, } E_0 = KP_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n ;$$

$$\mu_0 - \text{hệ số Poát-xông ban đầu, } \mu_0 = G - F \log \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right) ;$$

P_a - áp lực khí quyển;

ε_a - biến dạng nén dọc trục.

Các thông số vật liệu c , φ , R , K , n , G , F , D được xác định bằng thí nghiệm nén ba trục. Dưới đây đưa các giá trị của các thông số này ứng với một đập đá đổ để tham khảo.

Bảng 2.6.3: Thông số vật liệu theo mô hình Đun-can & Chang với một số loại vật liệu

Vật liệu	R	K	n	G	F	D
Đá đổ nằm dưới nước	0,88	750	0,49	0,41	0,16	2,8
Đá đổ	0,88	900	0,49	0,41	0,16	2,8
Lớp đệm	0,86	1050	0,46	0,40	0,13	3,8
Bản mặt bê tông	0	200000	0	0,17	0	0

Bài toán phi tuyến thường phải giải đúng dần bằng phương pháp lặp. Tải trọng được chia thành nhiều cấp, trong mỗi cấp vật liệu được coi như đàn hồi tuyến tính với giá trị mô đun đàn hồi và hệ số Poat-xông không đổi và được xác định chính xác dần bằng công thức (2.6.75) và (2.6.76) sau khi tính được ứng suất ở từng bước lặp. Quá trình giải kết thúc khi sai số của ứng suất tính được ở bước lặp sau so với ứng suất ở bước lặp trước đạt trị số cho phép.

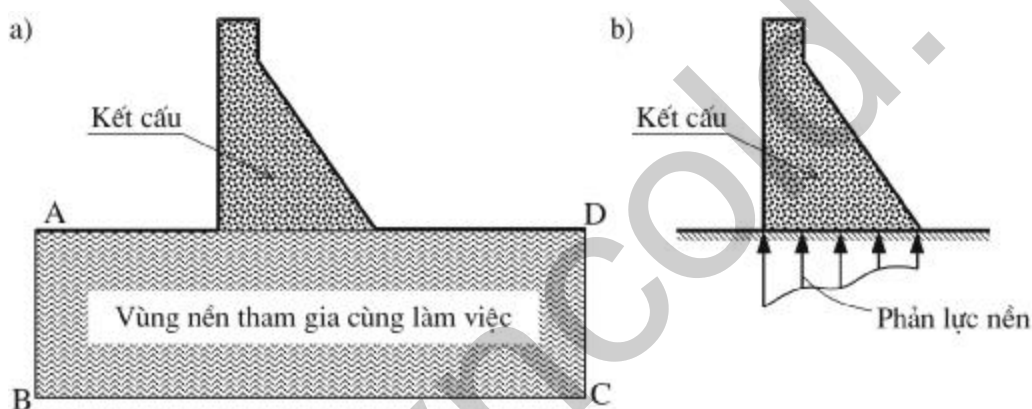
2.7. TÍNH HỆ KẾT CẤU - NỀN

2.7.1. Khái niệm và giả thiết tính toán (mô hình nền)

Các công trình thủy lợi như đập, cống, trạm bơm, đường hầm v.v... đều được đặt trên mặt nền (đáy tiếp xúc với nền), đặt sâu trong nền (đáy và mặt bên tiếp xúc với nền) hoặc đặt ngâm trong nền (toàn bộ bề mặt của chu vi ngoài tiếp xúc với nền). Do kết cấu và nền tiếp xúc chặt chẽ với nhau nên cả hai cùng tham gia chịu lực. Thuật ngữ chuyên môn gọi hệ kết cấu và nền cùng tham gia chịu lực là hệ kết cấu - nền. Để tính toán loại kết cấu này cho đến nay thường chọn một trong hai cách tiếp cận:

1. Cách thứ nhất

- + Khi giải bằng giải tích coi nền là nửa không gian (với bài toán không gian) hoặc nửa mặt phẳng (với bài toán phẳng) có kích thước vô hạn về chiều rộng và chiều sâu được cấu tạo từ vật liệu đàn hồi tuyến tính. Còn khi giải bằng phương pháp số thường lấy vùng nền có kích thước giới hạn đủ lớn. Chẳng hạn khi tính đập thì vùng nền cùng tham gia chịu lực với đập thường lấy có chiều rộng ít nhất gấp 3 lần chiều rộng của đáy đập, chiều sâu ít nhất bằng chiều cao của đập. Chuyển vị ngang trên biên đứng AB, CD và chuyển vị đứng trên biên ngang BC lấy bằng 0.
- + Tính hệ kết cấu - nền như một kết cấu không đồng chất về vật liệu với điều kiện liên tục về chuyển vị và ứng suất trên bề mặt tiếp xúc giữa kết cấu với nền (hình 2.7.1 a).



Hình 2.7.1: Sơ đồ tính kết cấu cùng làm việc với nền

2. Cách thứ hai

- + Giả thiết dạng của phản lực của nền trên bề mặt tiếp xúc (hình 2.7.1 b).
- + Tính kết cấu dưới tác dụng của phản lực nền giả thiết và các tác động khác như với kết cấu thông thường.

Giả thiết dạng của phản lực nền sử dụng phổ biến hiện nay là giả thiết Uyn-cờ-le (Winkler), coi nền có biến dạng đàn hồi tuyến tính, cường độ phản lực nền p ở điểm bất kỳ trên mặt tiếp xúc tỷ lệ bậc nhất với độ lún y của nền tại điểm đó (hình 2.7.2), cụ thể là:

$$p_1 = k_1 y \quad (2.7.1)$$

trong đó: hệ số tỷ lệ k_1 được gọi là hệ số nền (N/cm^3 , kN/m^3). Trị số của k_1 được xác định từ thí nghiệm bần nén tại hiện trường.

Trường hợp không có số liệu thí nghiệm, khi tính dầm hoặc tấm móng đặt trên nền có thể tính k_1 bằng công thức:

$$k_1 = \frac{E_0}{(1 - \mu_0^2)H} \quad (2.7.2)$$

trong đó:

E_0, μ_0 - mô đun biến dạng và hệ số Poát-xông của nền;

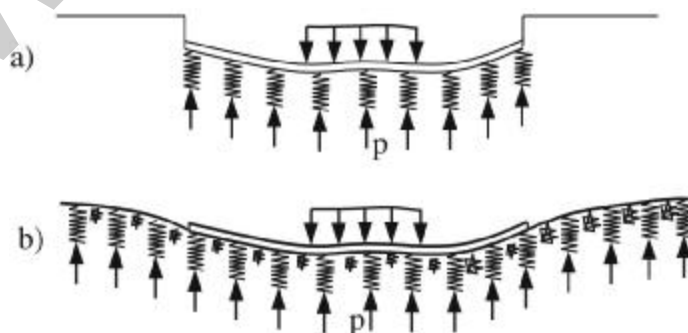
H - chiều sâu của vùng đất chịu nén kể từ bề mặt tiếp xúc.

Ngoài ra, có thể tham khảo giá trị k_1 ứng với từng loại đất trong bảng 2.7.1.

Bảng 2.7.1: Hệ số nền của một số loại đất

Thứ tự	Phân loại đất nền	Hệ số nền (kN/m ³)
1	Đất có độ chặt nhỏ (cát chảy, cát mới đắp, sét ẩm mềm)	1000 - 5000
2	Đất có độ chặt trung bình (sỏi đắp, sét ẩm)	5000 - 50000
3	Đất chặt (cát chặt, sỏi, đá dăm, đá vụn nhỏ, sét ít ẩm)	5000 - 10000
4	Đất rất chặt (á sét được nén chặt nhân tạo, sét cứng)	100000 - 200000
5	Đất cứng (đá mềm nứt nẻ, đá vôi, sa thạch)	200000 - 1000000
6	Đá cứng	1000000 - 15000000
7	Nền cọc	50000 - 150000

Về mặt vật lý, bản chất của giả thiết Uyn-cờ-le là thay thế nền bằng tập hợp của một hệ lò xo thẳng đứng (hình 2.7.2.a), mỗi lò xo đại diện cho một cột đất nền có kích thước mặt cắt bằng đơn vị. Phản lực nền tại mỗi điểm trên bề mặt tiếp xúc chính là lực nén trong mỗi lò xo. Trong giả thiết Uyn-cờ-le bỏ qua ma sát giữa các cột đất, do vậy dùng giả thiết Uyn-cờ-le không tính được chuyển vị ở ngoài móng gây ra bởi tải trọng đặt trong móng và ngược lại. Nói cách khác, mô hình Uyn-cờ-le chỉ đề cập đến khả năng truyền lún bởi móng, không phản ánh được khả năng truyền lún do ma sát giữa các cột đất nền. Vì vậy dùng giả thiết Uyn-cờ-le không giải được bài toán xem xét ảnh hưởng của hai kết cấu nằm cạnh nhau, trong khi ảnh hưởng này trong nhiều trường hợp không thể bỏ qua, thậm chí dẫn đến sự cố phá hoại công trình.



Hình 2.7.2: Mô hình nền Uyn-cờ-le (a) và Pas-te-rờ-nắc (b)

Vẫn giữ tính đơn giản mà lại khắc phục được nhược điểm này của mô hình nền Uyn-cờ-le mô hình nền Pas-te-rờ-nắc đã đưa thêm vào lực ma sát giữa hai cột đất thể hiện qua sự nứu kéo lẫn nhau của các lò xo kê liền (hình 2.7.2 b). Trị số của lực ma sát tỷ lệ với độ trượt giữa hai cột đất kê liền, mà độ trượt này bằng góc xoay của trục dầm hoặc góc xoay của mặt trung bình của tấm, cụ thể là:

- Với dầm:

$$t = k_2 \frac{dw}{dz} \quad (2.7.3)$$

- Với tấm:

$$\begin{aligned} t_x &= k_{2x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ t_y &= k_{2y} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Trong các công thức trên các hệ số tỷ lệ k_2 hoặc k_{2x} , k_{2y} được gọi là hệ số nền thứ hai. Hệ số này đặc trưng cho sự tắt dần độ lún của nền ở ngoài phạm vi móng của gây ra bởi tải trọng đặt ở trong móng và cũng được xác định từ thí nghiệm bàn nén tại hiện trường.

Mô hình nền Pas-te-rờ-nắc được ứng dụng để giải các hệ kết cấu - nền có xét đến ảnh hưởng của tải trọng bên (tải trọng đặt ngoài móng) đến công trình, ví dụ ảnh hưởng của công trình sẽ xây đến công trình đang tồn tại, ảnh hưởng của đất đắp hoàn thổ vào hố móng đến công trình đặt trong hố móng.

2.7.2. Tính dầm và tấm trên nền đàn hồi Uyn-cờ-le

Bài toán tính dầm hoặc tấm trên nền Uyn-cờ-le thường được giải bằng phương pháp chuyển vị trên cơ sở thiết lập phương trình vi phân độ võng của dầm hoặc của tấm.

Với dầm trên nền Uyn-cờ-le phương trình vi phân độ võng được viết ở dạng:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + \frac{k_1}{EJ} w = \frac{q}{EJ} \quad (2.7.5)$$

trong đó: EJ là độ cứng của dầm.

Với tấm trên nền Uyn-cờ-le phương trình vi phân độ võng được viết ở dạng:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{k_1}{D} w = \frac{q}{D} \quad (2.7.6)$$

trong đó: D là độ cứng trụ của tấm xác định bằng công thức (2.6.41).

Thí nghiệm của các phương trình trên bằng phương pháp giải tích chỉ cho phép hạn chế trong một số trường hợp, chẳng hạn như dầm hoặc tấm có mặt cắt không đổi, nền đồng chất đẳng hướng, tải trọng phân bố liên tục v.v...

Chẳng hạn, với dầm có độ cứng không đổi nghiệm của phương trình (2.7.5) có dạng:

$$y = e^{mz} (C_1 \cos mz + C_2 \sin mz) + e^{-mz} (C_3 \cos mz + C_4 \sin mz)$$

trong đó:

$$m = \sqrt[4]{\frac{k_1}{4EJ}};$$

C_1, \dots, C_4 - các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên.

Các công thức tính độ võng, góc xoay và nội lực của dầm được thiết lập cho 3 trường hợp cụ thể:

- + Dầm dài vô hạn.
- + Dầm dài nửa vô hạn.
- + Dầm dài hữu hạn.

Tuy vậy tính toán bằng các công thức này khá phức tạp, dễ nhầm lẫn. Tốt nhất là nên sử dụng các phần mềm lập sẵn ví dụ SAP 2000 của Mỹ hoặc WSKC của Trung tâm Tin học trường Đại học Thủy lợi.

2.8. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA KẾT CẤU

Các kết cấu, nhất là các kết cấu có dạng mảnh khi chịu nén hoặc uốn nếu tải trọng vượt quá một giá trị tới hạn nào đó sẽ bị mất ổn định. Khi bị mất ổn định ngoài biến dạng bình thường ở kết cấu sẽ xuất hiện thêm biến dạng khác, ví dụ ở thanh chịu nén sẽ xuất hiện thêm biến dạng uốn, ở dầm chịu uốn sẽ xuất hiện thêm biến dạng xoắn v.v... Về nguyên tắc không bao giờ được cho kết cấu làm việc ở trạng thái mất ổn định.

Tính ổn định của kết cấu là xác định lực tới hạn P_{th} hoặc tham số lực tới hạn u_{th} để trên cơ sở đó giữ cho kết cấu làm việc ở trạng thái cân bằng ổn định. Vì trong phần lớn các trường hợp kết cấu bị mất ổn định khi vật liệu của kết cấu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi nên dưới đây chỉ xét ổn định đàn hồi của kết cấu.

2.8.1. Ổn định đàn hồi của thanh chịu nén đúng tâm

2.8.1.1. Thanh hai đầu liên kết cứng chịu lực tập trung ở đỉnh (hình 2.8.1)

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu \ell)^2} \quad (2.8.1)$$

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.8.2)$$

trong đó:

E - mô đun đàn hồi của vật liệu làm thanh;

J - mômen quán tính chính trung tâm có giá trị nhỏ nhất của mặt cắt ngang;

ℓ - chiều dài thanh;

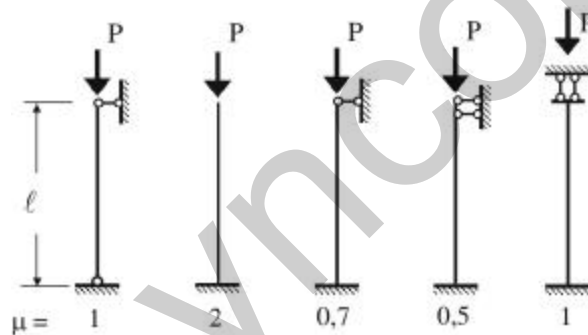
μ - hệ số phụ thuộc liên kết hai đầu thanh cho trong hình 2.8.1;

F - diện tích nguyên của mặt cắt ngang thanh;

λ - độ mảnh của thanh

$$\lambda = \mu \ell \sqrt{\frac{F}{J}} \tag{2.8.3}$$

Các công thức trên chỉ đúng khi vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi, nghĩa là khi $\lambda \leq \lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{t\grave{e}}}}$. λ_0 là một đặc trưng cơ học của vật liệu.

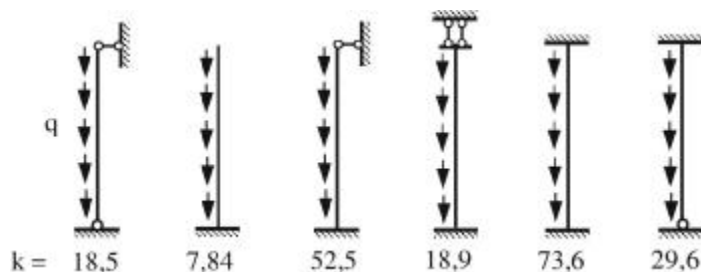


Hình 2.8.1: Hệ số liên kết hai đầu thanh μ

2.8.1.2. Thanh 2 đầu liên kết cứng chịu trọng lượng bản thân

$$(q\ell)_{th} = k \frac{EJ}{\ell^2} \tag{2.8.4}$$

trong đó k là hệ số phụ thuộc liên kết 2 đầu thanh và cho trong hình 2.8.2.






Hình 2.8.2: Hệ số liên kết hai đầu thanh k

2.8.1.3. Thanh 2 đầu liên kết đàn hồi

Với thanh có hai đầu liên kết đàn hồi phương trình xác định lực tới hạn có dạng siêu việt. Trong bảng 2.8.1 trình bày một số trường hợp thường gặp.

Bảng 2.8.1

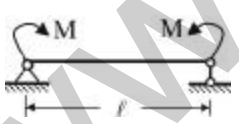
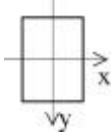
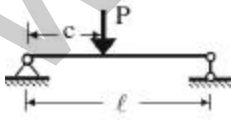
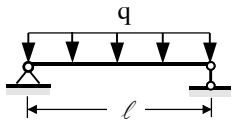
Sơ đồ kết cấu			
Phương trình ổn định	$\cotgv = v \frac{KEJ}{l}$	$tgv = \frac{v}{\left(1 + v^2 \frac{KEJ}{l}\right)}$	$tgv = v - v^3 \frac{KEJ}{l^3}$
$v = l \sqrt{\frac{P_{th}}{EJ}}$; K là độ mềm của liên kết đàn hồi.			

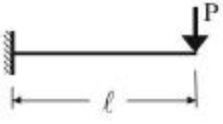
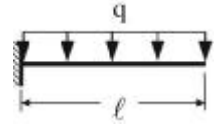
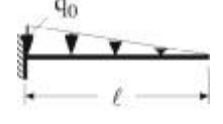
2.8.2. Ổn định đàn hồi của dầm chịu uốn phẳng

2.8.2.1. Dầm mặt cắt ngang là hình chữ nhật hẹp

Lực tới hạn ứng với một số trường hợp chịu lực cho trong bảng 2.8.2.

Bảng 2.8.2: Lực tới hạn dầm chữ nhật hẹp

Sơ đồ dầm	Lực tới hạn	Ghi chú
	$M_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_z}$	z là trục thanh 
	$P_{th} = \frac{K}{l} \sqrt{EJ_y GJ_z}$	K phụ thuộc c được cho trên bảng 2.8.3 P đặt trên trục dầm
	$(q\ell)_{th} = \frac{28,3}{l^2} \sqrt{EJ_y GJ_z}$	q đặt trên trục dầm

Sơ đồ dầm	Lực tới hạn	Ghi chú
	$P_{th} = \frac{K}{\ell^2} \sqrt{EJ_y GJ_z}$	K phụ thuộc khoảng cách a từ điểm đặt lực tới trục dầm. Trị số cho trên bảng 2.8.4 và 2.8.5
	$(q\ell)_{th} = \frac{12,85}{\ell^2} \sqrt{EJ_y GJ_z}$	q đặt trên trục dầm
	$q_0^{th} = \frac{52,8}{\ell^2} \sqrt{EJ_y GJ_z}$	q đặt trên trục dầm

Bảng 2.8.3

$\frac{c}{\ell}$	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05
K	16,94	17,15	17,82	19,04	21,01	24,1	29,11	37,88	56,01	111,6

Bảng 2.8.4

Điểm đặt lực cách trọng tâm phía trên đoạn là a											
$\frac{a}{\ell} \sqrt{\frac{EJ_y}{GJ_z}}$	0	0,0031	0,0887	0,164	0,238	0,322	0,425	0,568	0,791	1,224	2,485
K	4,013	4,0	3,6	3,2	2,8	2,4	2,0	1,6	1,2	0,8	0,4

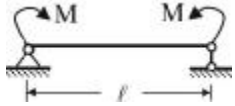
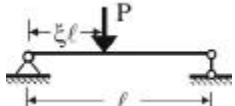
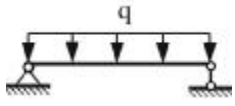

Bảng 2.8.5

Điểm đặt lực ở dưới trọng tâm và cách khoảng là a					
$\frac{a}{\ell} \sqrt{\frac{EJ_y}{GJ_z}}$	0	0,114	0,320	0,923	∞
K	4,013	4,4	4,8	5,2	5,562

2.8.2.2. Dầm mặt cắt ngang chữ I

Lực tới hạn ứng với một số trường hợp chịu lực của dầm cho trong bảng 2.8.6.

Bảng 2.8.6: Lực tới hạn của dầm chữ I chịu uốn phẳng

Sơ đồ dầm	Lực tới hạn	Ghi chú
	$M_{th} = \frac{K}{\ell} \sqrt{EJ_y GJ_z}$ (GJ_z : độ cứng chống xoắn của mặt cắt ngang)	Hệ số $K = \pi \sqrt{1 + \pi^2 \frac{a^2}{\ell^2}}$ phụ thuộc tỷ số $\frac{\ell}{a}$ cho trong bảng 2.8.7, trong đó $a^2 = \frac{h^2 E J_y^*}{2 G J_z} \approx \frac{h^2 E J_y}{4 G J_z}$ (h là chiều cao tiết diện chữ I)
	$P_{th} = \frac{aK}{\ell^2} \sqrt{EJ_y GJ_z}$	α , K hệ số phụ thuộc tỷ số $\frac{\ell}{a}$; trị số α cho trong bảng 2.8.8; trị số K cho trong bảng 2.8.9
	$(q\ell)_{th} = \frac{K}{\ell^2} \sqrt{EJ_y GJ_z}$	Hệ số K phụ thuộc tỷ số $\frac{\ell}{a}$; trị số K cho trong bảng 2.8.10 ứng với 3 trường hợp: q đặt ở trọng tâm, ở bản cánh trên, ở bản cánh dưới.
	$P_{th} = \frac{K}{\ell^2} \sqrt{EJ_y GJ_z}$	Hệ số K (khi P đặt ở trục dầm) phụ thuộc tỷ số $\frac{\ell}{a}$, cho trong bảng 2.8.11

Bảng 2.8.7

$\frac{\ell^2}{a^2}$	0,1	1	2	4	6	8	10	12	16	20	24	28	32	36	40	100
K	31,40	10,36	7,66	5,85	5,11	4,70	4,43	4,24	4,0	3,83	3,73	3,66	3,59	3,55	3,51	3,29

Bảng 2.8.8: Giá trị α khi $\xi \leq 0,5$ khi P đặt trên trục dầm

ξ	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1
α	1,0	1,012	1,051	1,125	1,210	1,422	1,717	2,235	3,305

Bảng 2.8.9: Giá trị K khi P đặt trên trục dầm

$\frac{\ell^2}{a^2}$	0,4	4	8	16	24	32	48	64	80	96	160	240	320	400
K	86,4	31,9	25,6	21,8	20,3	19,6	18,8	18,3	18,1	17,9	17,5	17,4	17,2	17,2

Bảng 2.8.10: Giá trị K khi P đặt ở các vị trí khác nhau

$\frac{\ell^2}{a^2}$			0,4	4	8	16	24	32	48	64	80	128	200	280	360	400
K	Vị trí đặt tải P	Trọng tâm tiết diện	143,0	53,0	42,6	36,3	33,8	32,6	31,5	30,5	30,1	29,4	29,0	28,8	28,6	28,6
		Bản cánh trên	92,9	36,3	30,4	27,5	26,6	26,1	26,0	25,9	25,8	26,0	26,3	26,5	26,6	26,7
		Bản cánh dưới	222,5	77,4	59,6	48,1	43,6	40,5	37,9	36,3	35,1	33,2	32,0	31,5	31,0	30,8

Bảng 2.8.11: Giá trị K khi P đặt trên trục dầm

$\frac{\ell^2}{a^2}$	0,1	1	2	3	4	6	8	10	12	14	16	24	32	40
K	44,3	15,7	12,2	10,7	9,76	8,69	8,03	7,58	7,2	6,96	6,73	6,19	5,87	5,64

2.8.3. Ổn định đàn hồi của khung phẳng

Để xác định lực tới hạn của các thanh chịu nén trong khung phẳng thường dùng phương pháp chuyển vị. Giả thiết tải trọng chỉ là lực tập trung đặt tại các nút thì hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị (2.5.18) được viết ở dạng:

$$\begin{aligned}
 r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n &= 0 \\
 r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n &= 0 \\
 \dots & \\
 r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.8.5}$$

trong đó r_{ik} là phản lực đơn vị tại liên kết thêm vào nút thứ i gây ra bởi chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết thêm vào nút thứ k trên hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị. Khi tính r_{ik} phải xét tới lực dọc trong thanh.

Vì trạng thái mất ổn định của hệ ứng với $z_i \neq 0$ nên để có nghiệm định thức của ma trận hệ số trong hệ phương trình (2.8.5) phải bằng 0, tức là:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8.6)$$

Mặt khác, với các thanh chịu nén phản lực đơn vị ở liên kết đầu mỗi thanh có thể biểu diễn là một hàm siêu việt $\xi(v)$ của tham số v nh trong bảng 2.8.12 với

$$v = \ell \sqrt{\frac{N}{EJ}} \quad (2.8.7)$$

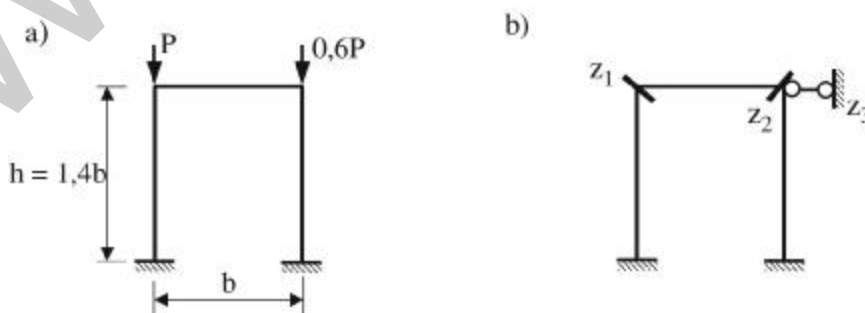
Nếu giả thiết tỷ số giữa lực nén của các thanh trong hệ khi hệ chuyển từ trạng thái ổn định sang trạng thái mất ổn định có giá trị nh nhau, tức là

$$\frac{N_1^{th}}{N_1} = \frac{N_2^{th}}{N_2} = \dots = \frac{N_n^{th}}{N_n} \quad (2.8.8)$$

thì tham số v ứng với mỗi thanh chịu nén có thể biểu diễn qua tham số v_i của thanh chịu nén thứ i .

Khai triển (2.8.6) được hệ phương trình chỉ chứa ẩn v_i . Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình cho giá trị tới hạn của tham số v_i của thanh thứ i . Vì tham số v của mỗi thanh chịu nén được biểu diễn qua tham số v_i của thanh chịu nén thứ i nên nếu biết v_{th} của thanh chịu nén thứ i sẽ tính được v_{th} của các thanh chịu nén khác. Biết v_{th} của mỗi thanh dựa vào (2.8.7) sẽ tính được N_{th} của các thanh đó.

Để làm rõ nội dung của phương pháp giải đối đây trình bày sơ lược cách xác định tham số lực tới hạn cho 2 thanh đứng trong khung vẽ ở hình 2.8.4 a. Tất cả các thanh có độ cứng là EJ .



Hình 2.8.4: Ví dụ tính tham số lực tới hạn cho khung

Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị được chọn như vẽ ở hình 2.8.4 b, trong đó z_1, z_2 là chuyển vị góc, z_3 là chuyển vị thẳng.

Tham số tải trọng của thanh đứng trái:

$$v_1 = h \sqrt{\frac{P}{EJ}} = v$$

Tham số tải trọng của thanh đứng phải:

$$v_2 = h \sqrt{\frac{0,6P}{EJ}} = 0,775v$$

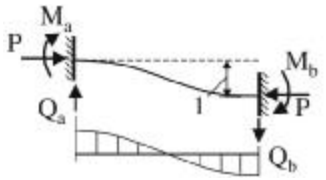
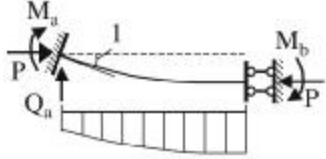
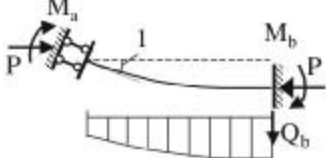
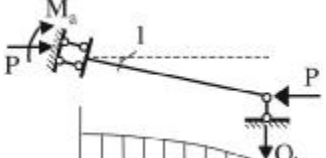
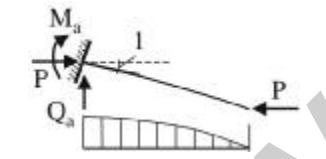
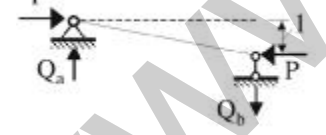
Vì các phản lực đơn vị của mỗi thanh chịu nén được biểu diễn qua các hàm $\xi(v)$ nên các phản lực r_{ik} của hệ cơ bản vẽ ở hình 2.8.4 b cũng được biểu diễn qua các hàm $\xi(v)$. Thay r_{ik} vào (2.8.6) và khai triển sẽ được phương trình chỉ chứa ẩn v . Giải phương trình này xác định được v_{th} của thanh đứng trái và thanh đứng phải:

$$v_1^{th} = 3,14$$

$$v_2^{th} = 0,775v_1^{th} = 2,43$$

Bảng 2.8.12: Các phân tử mẫu dùng tính ổn định của khung bằng phương pháp chuyển vị

Sơ đồ	M_a	M_b	$Q_a = Q_b$	Các ký hiệu
	$\frac{3EJ}{l} \zeta_1(v)$	0	$-\frac{3EJ}{l^2} \zeta_1(v)$	a - dấu trái b - dấu phải l - chiều dài thanh EJ - độ cứng chống uốn thanh
	$-\frac{3EJ}{l^2} \zeta_1(v)$	0	$\frac{3EJ}{l^3} \eta_1(v)$	$v = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ $\zeta_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}$
	$\frac{4EJ}{l} \zeta_2(v)$	$\frac{2EJ}{l} \zeta_3(v)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \eta_3(v)$	$\zeta_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}$

Sơ đồ	M_a	M_b	$Q_a = Q_b$	Các ký hiệu
	$-\frac{6EJ}{l^2} \zeta_4(v)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \zeta_4(v)$	$\frac{12EJ}{l^3} \eta_2(v)$	$\zeta_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}$ $\zeta_4(v) = \zeta_1 \left(\frac{v}{2} \right)$
	$\frac{EJ}{l} \frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$-\frac{EJ}{l} \frac{v}{\sin v}$	0	$\eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}$ $\eta_2(v) = \eta_1 \left(\frac{v}{2} \right) = \zeta_4(v) - \frac{v^2}{12}$
	$\frac{EJ}{l} \frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$-\frac{EJ}{l} \frac{v}{\sin v}$	0	$\eta_3(v) = \zeta_4(v)$ Trị số các hàm $\zeta, \eta, \frac{v}{\sin v}$,
	$-\frac{EJ}{l} v \operatorname{tg} v$	0	0	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$ ứng với các v khác nhau tra bảng.
	$-\frac{EJ}{l} v \operatorname{tg} v$	0	0	
	0	0	$-\frac{EJ}{l^3} v^2$	

2.8.4. Ổn định đàn hồi của tấm chịu nén

2.8.4.1. Tấm chịu lực nén phân bố bậc 1 (Hình 2.8.5a)

$$q_x(y) = q_0 \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right) \quad (2.8.9)$$

trong đó α là một hệ số.

Ứng suất tối hạn được tính theo công thức:

$$\sigma_{th} = K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \tag{2.8.10}$$

trong đó:

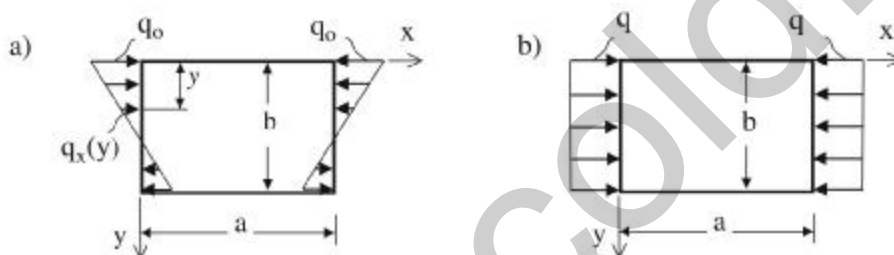
t - bề dày tấm;

E - môđun đàn hồi;

ν - hệ số Poat-xông của vật liệu;

K - hệ số phụ thuộc điều kiện biên tấm và tỷ số $\frac{b}{a}$ và trị số cho trong bảng 2.8.12.

2.8.4.2. Tấm chịu lực nén phân bố đều cường độ q (Hình 2.8.5b)



Hình 2.8.5: Tấm chịu nén bởi lực phân bố

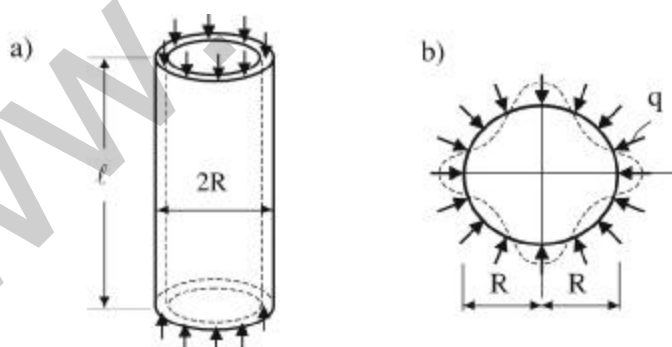
Ứng suất tối hạn được tính theo (2.8.8) với $\alpha = 0$, hệ số K phụ thuộc điều kiện biên tấm và cho trên bảng 2.8.17.

Bảng 2.8.13: Giá trị K trong (2.8.10) khi cạnh tấm liên kết khớp

α	$\frac{a}{b}$								
	0,4	0,5	0,6	0,667	0,75	0,8	0,9	1,0	1,5
2	29,1	25,6	24,1	23,9	24,1	24,4	25,6	25,6	24,3
$\frac{4}{3}$	18,7	-	12,9	-	11,5	11,2	-	11,0	11,5
1	15,1	-	9,7	-	8,4	8,1	-	7,8	8,4
$\frac{4}{5}$	13,3	-	8,3	-	7,1	6,9	-	6,6	7,1
$\frac{2}{3}$	10,8	-	7,1	-	6,1	6,0	-	5,8	6,1

Bảng 2.8.14: Giá trị K trong (2.8.8) khi cạnh tám liên kết khớp và ngàm

Điều kiện biên	$\frac{a}{b}$									
	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
Các cạnh liên kết khớp	5,14	4,2	4,0	4,13	4,47	4,2	4,05	4,0	4,0	4,0
Các cạnh liên kết ngàm	-	-	9,4	9,3	8,8	9,5	8,5	8,2	7,8	7,0
Cạnh $y = 0$ và $y = b$ liên kết ngàm, các cạnh còn lại liên kết khớp	7,05	7,29	7,69	7,15	7,04	7,2	7,05	7,0	7,15	7,0
Cạnh $x = 0$ và $x = a$ liên kết ngàm, các cạnh còn lại liên kết khớp	13,38	8,73	6,71	5,84	5,45	5,34	5,18	4,85	4,41	4,0
Cạnh $x = 0$ và $x = a$ liên kết khớp, các cạnh còn lại tự do	-	2,7	1,70	1,47	1,36	1,33	1,34	1,38	1,36	1,33
Cạnh $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ liên kết khớp, cạnh $y = b$ liên kết ngàm	3,65	2,15	1,44	1,14	0,95	0,81	0,76	0,7	0,56	0,46

2.8.5. Ổn định đàn hồi của vỏ trụ tròn**2.8.5.1. Vỏ chịu nén đều theo phương dọc trục, các mép vỏ liên kết khớp (Hình 2.8.6 a)****Hình 2.8.6: Vỏ trụ chịu nén**

Ứng suất tới hạn khi vỏ bị mất ổn định cục bộ

$$\sigma_{th} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \frac{\ell}{R} \quad (2.8.11)$$

trong đó:

ℓ - chiều dài;

R - bán kính của trụ.

Ổn định tổng thể của vỏ trụ này tính như thanh chịu nén tiết diện rỗng.

2.8.5.2. Vỏ chịu áp lực phân bố đều hướng tâm phía ngoài (Hình 2.8.6b)

Áp lực tới hạn trên khi mép vỏ liên kết khớp:

$$q_{th} = \frac{Et}{R(n^2 - 1)} \frac{1}{\left(1 + \frac{n^2 \ell^2}{\pi^2 R^2}\right)} + \frac{Et^3}{12(1 - \gamma^2)R^3} \times \left[n^2 - 1 + \frac{(2n^2 - 1 - \gamma)}{\left(1 + \frac{n^2 \ell^2}{\pi^2 R^2}\right)} \right] \quad (2.8.12)$$

trong đó:

t - bề dày;

ℓ - chiều dài;

n - số đỉnh sóng dọc theo chu vi trong dạng mất ổn định. Trong từng trường hợp cụ thể chọn n sao cho P_{th} là nhỏ nhất. Giá trị n phụ thuộc tỷ số $\frac{\ell}{R}$ và $\frac{R}{t}$ xác định theo bảng 2.8.15.

Bảng 2.8.18: Giá trị n trong (2.8.12)

$\frac{\ell}{R}$	$\frac{R}{t}$			
	250	200	50	25
∞	2	2	2	2
10	4	3	2	2
5	5	4	3	3
2	8	6	5	4

2.9. DAO ĐỘNG CỦA KẾT CẤU

Tải trọng động là tải trọng tác dụng vào kết cấu làm kết cấu chuyển động có gia tốc. Dao động của kết cấu là bài toán thường gặp trong công trình xây dựng, tải trọng gây dao động thường gặp nhất là lực kích thích tuần hoàn dạng

$$P(t) = P_0 \sin rt$$

trong đó:

P_0 - biên độ của tải trọng;

r - tần số dao động.

Với bài toán dao động của kết cấu có hai vấn đề cần giải quyết:

- + Xác định tần số dao động riêng của kết cấu để xem có trùng với tần số của lực kích thích để xảy ra cộng hưởng hay không?
- + Xác định biên độ nội lực và chuyển vị để đánh giá an toàn của công trình theo điều kiện bền và điều kiện cứng.

Với một hệ dao động, bậc tự do là số thông số độc lập cần thiết để xác định vị trí của hệ thống qua vị trí của các khối lượng tập trung trong hệ.

Các đặc trưng cơ bản của dao động là:

- + Chu kỳ dao động:

Thời gian cần thiết để thực hiện xong một dao động, thường ký hiệu là T , đơn vị đo là giây (s).

- + Tần số dao động:

Số dao động được thực hiện trong thời gian 1 giây, thường ký hiệu là f , đơn vị đo là Héc (Hz).

- + Tần số vòng của dao động:

Số dao động được thực hiện trong thời gian 2π giây, thường ký hiệu là ω , đơn vị đo là 1/s.

Giữa các đại lượng này có mối liên hệ sau:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ f &= \frac{\omega}{2\pi} \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

2.9.1. Dao động của hệ có một bậc tự do

2.9.1.1. Phương trình vi phân dao động

Dựa vào nguyên lý Đa-lăm-be thiết lập được phương trình vi phân dao động trong trường hợp lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc ở dạng:

$$M \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + Ky(t) = P(t) \quad (2.9.2)$$

trong đó:

M - khối lượng của hệ;

c - hệ số cản;

K - độ cứng của hệ dao động;

P(t) - lực kích thích tuần hoàn.

Về bản chất vật lý phương trình (2.9.2) biểu diễn cân bằng của các lực tác dụng lên hệ: Lực quán tính $M\ddot{y}$, lực cản $c\dot{y}$, lực đàn hồi Ky và lực kích thích $P(t)$.

2.9.1.2. Dao động tự do

+ Phương trình dao động khi không có lực cản:

$$y(t) = A_0 \sin(\omega t + \lambda) \quad (2.9.3)$$

+ Phương trình dao động khi lực cản bé: ($c < 2\sqrt{kM}$)

$$y_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) \quad (2.9.4)$$

trong đó:

$$\alpha = \frac{c}{2M};$$

$$A_0 = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2};$$

A_1 - biên độ dao động,

$$A_1 = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + \alpha y_0)^2}{\omega^2}} \quad (2.9.5)$$

$$\lambda = \text{artg}\left(\frac{y_0}{v_0} \omega\right);$$

λ_1 - góc lệch pha,

$$\lambda_1 = \text{artg}\left(\frac{y_0 \omega_1}{v_0 + \alpha y_0}\right) \quad (2.9.6)$$

y_0, v_0 - dịch chuyển và vận tốc ban đầu của khối lượng (tại thời điểm $t = 0$).

+ Tần số dao động riêng khi không có lực cản:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_t}} \quad (2.9.7)$$

+ Tần số dao động riêng khi lực cản bé:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

trong đó

g - gia tốc trọng trường;

y_t - chuyển vị tĩnh theo phương của dao động tại vị trí đặt khối lượng do trọng lượng của khối lượng M đặt tĩnh tại đó gây ra (hình 2.9.1 b).

Vì trong thực tế α khá nhỏ nên có thể lấy $\omega_1 \approx \omega$. Công thức (2.9.7) được dùng cho thanh chịu dao động uốn và dao động dọc trục.

+ Tần số dao động riêng xoắn khi không có lực cản:

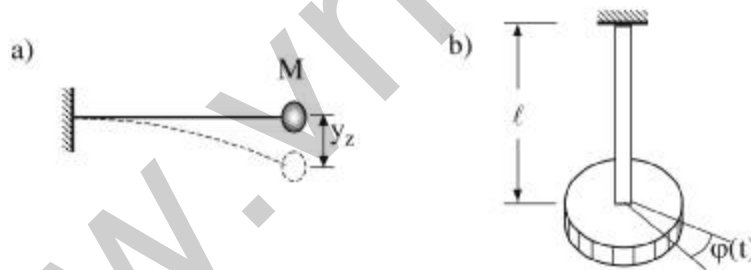
$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_{\text{xoắn}}}{J\ell}} \quad (2.9.8)$$

trong đó:

$GJ_{\text{xoắn}}$ - độ cứng chống xoắn của trục xoắn;

J - mômen quán tính của đĩa đối với trục xoắn;

ℓ - chiều dài trục xoắn (Hình 2.9.1 b).



Hình 2.9.1

2.9.1.3. Dao động cưỡng bức chịu lực kích thích

$$P(t) = P_0 \sin rt$$

1. Phương trình dao động

Sau khi dao động đã đi vào ổn định (phần dao động tự do mất đi do lực cản), dao động của hệ là một dao động điều hoà có cùng tần số với tần số của lực kích thích.

$$y(t) = A_2 \sin(rt + \lambda_2) = K_d y_t \sin(rt + \lambda_2) \quad (2.9.9)$$

trong đó:

y_t - chuyển vị tĩnh tại vị trí đặt khối lượng tập trung do lực có giá trị bằng biên độ của lực kích thích đặt tĩnh tại đó gây ra.

K_d - hệ số động,

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{c^2}{K^2} r^2}} \quad (2.9.10)$$

λ_2 - góc lệch pha,

$$\lambda_2 = \text{artg} \frac{cr}{K - Mr^2} \quad (2.9.11)$$

Về lý thuyết, khi tỷ số $\frac{r}{\omega} = 1$, tức là tần số dao động riêng bằng tần số dao động cưỡng bức sẽ xảy ra hiện tượng cộng hưởng. Song trong thực tế khi tỷ số này nằm trong khoảng $0,75 \leq \frac{r}{\omega} \leq 1,25$ biên độ dao động đã tăng rất lớn và khoảng này được coi là vùng xảy ra cộng hưởng.

2. Tính chuyển vị và nội lực

Từ (2.9.9) rút ra công thức chung để tính biên độ chuyển vị và biên độ nội lực do lực kích thích gây ra:

$$S_d = K_d S_t \quad (2.9.12)$$

trong đó:

S_d - biên độ chuyển vị hoặc nội lực do lực kích thích gây ra;

S_t - chuyển vị hoặc nội lực do lực có giá trị bằng biên độ của lực kích thích đặt tĩnh tại vị trí đặt khối lượng tập trung gây ra;

K_d - hệ số động,

- Khi lực kích thích là lực điều hoà, K_d tính theo (2.9.10);
- Khi lực kích thích như áp lực nổ, áp lực nước va, áp lực gió, lực va chạm v.v... là lực kích động tắt nhanh sau một khoảng thời gian t_1 nào đó và được biểu diễn dưới dạng:

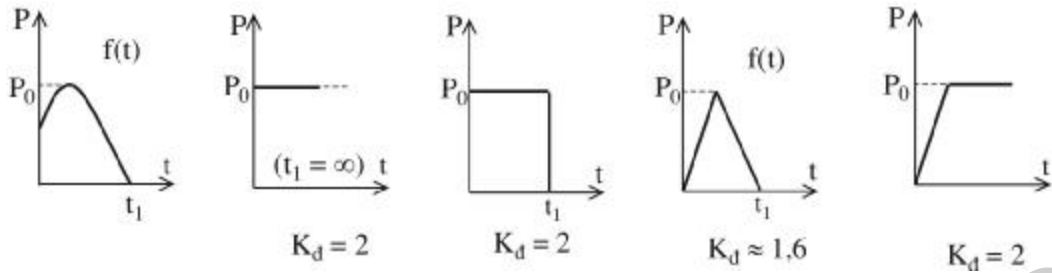
$$P(t) = P_0 f(t) \quad (2.9.13)$$

với:

P_0 - biên độ của lực động;

$f(t)$ - hàm chất tải;

thì giá trị K_d được lấy tùy theo dạng của hàm chất tải (hình 2.9.2).



Hình 2.9.2: Một số dạng tải trọng kích động và hệ số động tương ứng

2.9.2. Dao động hệ có n bậc tự do

Phương trình vi phân dao động của hệ n bậc tự do chịu tác dụng của lực kích thích đặt tại vị trí của các khối lượng tập trung viết ở dạng ma trận có dạng tương tự như phương trình (2.9.1)

$$M \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + Ky(t) = P(t) \quad (2.9.14)$$

trong đó:

M - ma trận khối lượng;

c - ma trận cản;

K - ma trận cứng của hệ;

$y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ - lần lượt là vectơ chuyển vị, vectơ vận tốc và vectơ gia tốc chuyển động của các khối lượng;

$P(t)$ - vectơ lực kích thích.

2.9.2.1. Dao động tự do

Hệ có bao nhiêu khối lượng tập trung sẽ có bấy nhiêu tần số dao động riêng. Bất kỳ tần số dao động riêng nào có trị số xấp xỉ tần số lực kích thích đều xuất hiện cộng hưởng.

Nếu bỏ qua lực cản, các tần số dao động riêng được xác định từ phương trình sau:

$$D = |K - M\omega^2| = 0 \quad (2.9.15)$$

hoặc biểu diễn qua ma trận mềm của hệ:

$$D = \begin{vmatrix} M_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} & M_2 \delta_{12} & \dots & M_n \delta_{1n} \\ M_1 \delta_{21} & M_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} & \dots & M_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_1 \delta_{n1} & M_2 \delta_{n2} & \dots & M_n \delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9.16)$$

trong đó:

δ_{ik} - chuyển vị đơn vị tại khối lượng thứ i do lực đơn vị đặt tại khối lượng thứ k gây ra

M_i - khối lượng thứ i.

Các tần số dao động riêng của hệ thường được đặt tên theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$$

Các tần số có giá trị thấp được gọi là các tần số cơ bản. Tần số ω_1 được gọi là tần số cơ bản thứ nhất và được tính gần đúng bằng công thức Pe-sơ-tel:

$$\frac{1}{\sqrt{B_2}} < \omega_1^2 < \frac{2}{B_1 \left[1 + \sqrt{2 \frac{B_2}{B_1^2} - 1} \right]} \quad (2.9.17)$$

trong đó:

$$B_1 = \sum_{i=1}^n M_i \delta_{ii} ;$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^n M_i^2 \delta_{ii}^2 + 2 \sum_{i,k=1}^n M_i M_k \delta_{ik}^2 \quad (\text{với } i \neq k).$$

2.9.2.2. Dao động cưỡng bức do tác dụng của các lực kích thích điều hoà cùng tần số

Nếu ký hiệu S là chuyển vị hoặc nội lực do lực kích thích đặt tại vị trí của các khối lượng tập trung gây ra thì giá trị này có thể tính bằng công thức:

$$S = \bar{S}_1 F_1 + \bar{S}_2 F_2 + \dots + \bar{S}_n F_n + S_{P_0} \quad (2.9.18)$$

trong đó:

S_{P_0} - giá trị của S do biên độ P_0 của các lực kích thích đặt tĩnh tại vị trí của các khối lượng tập trung gây ra;

\bar{S}_i - giá trị của S do lực bằng đơn vị đặt tĩnh tại khối lượng thứ i gây ra.

F_i - biên độ của lực quán tính tại khối lượng thứ i được xác định từ hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \delta_{i1} F_1 + \delta_{i2} F_2 + \dots + \delta_{ii}^* F_i + \dots + \delta_{in} F_n + \Delta_{iP_0} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (2.9.19)$$

với:

$$\delta_{ii}^* = \left(\delta_{ii} - \frac{1}{M_i r^2} \right);$$

Δ_{iP_0} - chuyển vị tại khối lượng thứ i do biên độ của các lực kích thích P_0 đặt tĩnh tại vị trí của các khối lượng tập trung gây ra.

2.9.3. Dao động của hệ có vô hạn bậc tự do

2.9.3.1. Dao động tự do

1. Dầm 1 nhịp dài l , khối lượng phân bố đều m

Các tần số cơ bản được xác định bằng công thức:

$$\omega_i = H_i \sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}} \tag{2.9.21}$$

Trong bảng 2.9.1 cho trị H_i ứng với 5 dạng dao động riêng của một số dầm 1 nhịp.

Bảng 2.9.1: Dao động tự do của dầm 1 nhịp

Dạng dầm	Các dạng dao động chính và tần số tương ứng				
Dầm công xôn	 $H_1 = 3,52$	 $H_2 = 22,4$	 $H_3 = 61,750$	 $H_4 = 121,0$	 $H_5 = 200$
Dầm 2 đầu khớp	 $9,87$	 $39,5$	 $88,9$	 158	 247
2 đầu ngàm	 $22,4$	 $61,7$	 121	 200	 298
1 đầu ngàm 1 đầu khớp	 $15,4$	 50	 104	 178	 272
	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5

2. Dầm liên tục và khung phẳng

Các tần số riêng là nghiệm của phương trình tần số thiết lập theo phương pháp chuyển vị như sau:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.9.22}$$

trong đó: r_{ik} là biên độ của phản lực tại liên kết thêm vào thứ i do chuyển vị cưỡng bức điều hoà $z_k(t) = 1 \sin rt$ tại liên kết thêm vào thứ k gây ra ở hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị. Các trị số này xác định được nhờ các phân tử mẫu cho trên bảng 2.9.2.

Bảng 2.9.2: Trị số biên độ phản lực động do chuyển vị gối tựa gây ra

Sơ đồ	$M_{ab} = M_0$	$M_{ba} = M_\ell$	$Q_{ab} = Q_0$	$Q_{ba} = Q_\ell$
	$\frac{4EJ}{l} \mu_1(\lambda)$	$\frac{2EJ}{l} \mu_2(\lambda)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \varepsilon_1(\lambda)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \varepsilon_2(\lambda)$
	$-\frac{6EJ}{l^2} \mu_3(\lambda)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \mu_4(\lambda)$	$\frac{12EJ}{l^3} \varepsilon_4(\lambda)$	$\frac{12EJ}{l^3} \varepsilon_4(\lambda)$
	$\frac{3EJ}{l} \mu_5(\lambda)$	0	$-\frac{3EJ}{l^2} \varepsilon_5(\lambda)$	$-\frac{3EJ}{l^2} \varepsilon_5^*(\lambda)$
	$-\frac{3EJ}{l^2} \mu_6(\lambda)$	0	$\frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_6(\lambda)$	$\frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_6^*(\lambda)$
	$-\frac{3EJ}{l^2} \mu_7(\lambda)$	0	$\frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_7(\lambda)$	$\frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_8(\lambda)$
	$\frac{EJ}{l} \mu_8(\lambda)$	$-\frac{EJ}{l} \mu_9(\lambda)$	$\frac{EJ}{l^2} \varepsilon_9(\lambda)$	0

$K^4 = \frac{mr^2}{EJ}$; $\lambda = k\ell$; các hàm μ, ε trên bảng 2.9.3

Bảng 2.9.3: Các hàm μ, ε trong động lực học công trình (trong bảng 2.9.2)

$\mu_1(\lambda) = \frac{\lambda B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{4 \Delta_1} = \frac{\lambda \operatorname{ch}\lambda \sin \lambda - \sin \lambda \cos \lambda}{4 (1 - \operatorname{ch}\lambda \cos \lambda)}$
$\mu_2(\lambda) = \frac{\lambda D_\lambda}{2 \Delta_1} = \frac{\lambda \operatorname{sh}\lambda - \sin \lambda}{2 (1 - \operatorname{ch}\lambda \cos \lambda)}$
$\mu_3(\lambda) = -\frac{\lambda^2 D_\lambda^2 - A_\lambda C_\lambda}{6 \Delta_1} = \frac{\lambda^2 \operatorname{sh}\lambda \sin \lambda}{6 (1 - \operatorname{ch}\lambda \cos \lambda)}$
$\mu_4(\lambda) = \frac{\lambda C_\lambda}{3 \Delta_1} = \frac{\lambda (\operatorname{ch}\lambda - \cos \lambda)}{3 (1 - \operatorname{ch}\lambda \cos \lambda)}$

$$\mu_5(\lambda) = \frac{\lambda D_\lambda^2 - B_\lambda^2}{3 \Delta_2} = \frac{2\lambda}{3} \frac{\text{sh}\lambda \sin \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cos \lambda};$$

$$\mu_6(\lambda) = -\frac{\lambda^2 A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^2}{3} \frac{\text{sh}\lambda \cos \lambda + \text{ch}\lambda \sin \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cos \lambda};$$

$$\mu_7(\lambda) = -\frac{\lambda^2 B_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^2}{3} \frac{\text{sh}\lambda + \sin \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cos \lambda};$$

$$\mu_8(\lambda) = \lambda \frac{A_\lambda^2 - C_\lambda^2}{\Delta_3} = \lambda \frac{2\text{ch}\lambda \sin \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda + \text{sh}\lambda \cos \lambda};$$

$$\mu_9(\lambda) = \lambda \frac{A_\lambda}{\Delta_3} = \lambda \frac{\text{ch}\lambda + \cos \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda + \text{sh}\lambda \cos \lambda};$$

$$\varepsilon_1(\lambda) = -\frac{\lambda^2 A_\lambda C_\lambda - B_\lambda^2}{6 \Delta_1} = \frac{\lambda^2}{6} \frac{\text{sh}\lambda \sin \lambda}{\Delta_1} = \mu_3(\lambda);$$

$$\varepsilon_2(\lambda) = \frac{\lambda^2 C_\lambda}{6 \Delta_1} = \mu_4(\lambda);$$

$$\varepsilon_3(\lambda) = \frac{\lambda^3 A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{12 \Delta_1} = \frac{\lambda^2}{12} \frac{\text{sh}\lambda \cos \lambda + \text{ch}\lambda \sin \lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cos \lambda};$$

$$\varepsilon_4(\lambda) = \frac{\lambda^3 B_\lambda}{12 \Delta_1} = \frac{\lambda^2}{12} \frac{\text{sh}\lambda + \sin \lambda}{1 - \text{ch}\lambda \cos \lambda};$$

$$\varepsilon_5(\lambda) = -\frac{\lambda^2 A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^2}{3} \frac{\text{sh}\lambda \cos \lambda + \text{ch}\lambda \sin \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cos \lambda};$$

$$\varepsilon_5^*(\lambda) = -\frac{\lambda^2 B_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^2}{3} \frac{\text{sh}\lambda + \sin \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cos \lambda} = \mu_7(\lambda);$$

$$\varepsilon_6(\lambda) = \frac{\lambda^3 C_\lambda^2 - A_\lambda^2}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^3}{3} \frac{2\text{ch}\lambda \cos \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cos \lambda};$$

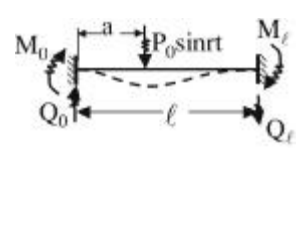
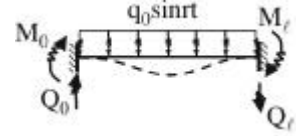
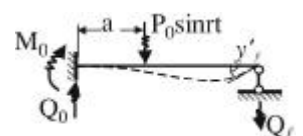
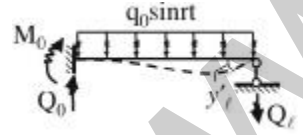
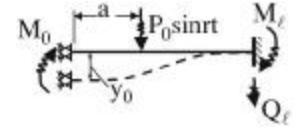
$$\varepsilon_6^*(\lambda) = \frac{\lambda^3 A_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^3}{3} \frac{\text{ch}\lambda + \cos \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cos \lambda} = \mu_7(\lambda);$$

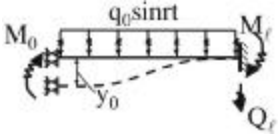
$$\varepsilon_8(\lambda) = \frac{\lambda^3 B_\lambda D_\lambda - A_\lambda^2}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^3}{3} \frac{1 + \text{ch}\lambda \cos \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cos \lambda};$$

$$\varepsilon_9(\lambda) = \lambda^2 \frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{\Delta_3} = \lambda^2 \frac{\text{ch}\lambda \sin \lambda - \text{sh}\lambda \cos \lambda}{\text{ch}\lambda \sin \lambda + \text{sh}\lambda \cos \lambda};$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ xem ở bảng 2.9.4

Bảng 2.9.4: Biên độ phản lực động do tải trọng động trên dầm 1 nhịp

Sơ đồ	Trị số các hàm A, B, C, D tra bảng
	$M_0 = \frac{P_0}{K} [C_\lambda D_{K(\ell-a)} - D_\lambda C_{K(\ell-a)}] : \Delta_1$ $Q_0 = P_0 [C_\lambda C_{K(\ell-a)} - B_\lambda D_{K(\ell-a)}] : \Delta_1$ $M_\ell = \frac{P_0}{K} [D_\lambda C_{Ka} - C_\lambda D_{Ka}] : \Delta_1$ $Q_\ell = P_0 [B_\lambda D_{Ka} - C_\lambda C_{Ka}] : \Delta_1$
	$M_0 = -M_\ell = \frac{q_0}{K^2} [C_\lambda (A_K - 1) - D_\lambda^2] : \Delta_1$ $Q_0 = -Q_\ell = \frac{q_0}{K} [C_\lambda D_\lambda - B_\lambda (A_\lambda - 1)] : \Delta_1$
	$M_0 = \frac{P_0}{K} [D_\lambda B_{K(\ell-a)} - B_\lambda D_{K(\ell-a)}] : \Delta_2$ $Q_0 = P_0 [A_\lambda D_{K(\ell-a)} - C_\lambda B_{K(\ell-a)}] : \Delta_2$ $Q_\ell = P_0 [B_\lambda C_{Ka} - A_\lambda D_{Ka}] : \Delta_2$ $y_\ell = \frac{P_0}{K^2 EJ} [C_\lambda D_{Ka} - D_\lambda C_{Ka}] : \Delta_2$
	$M_0 = \frac{q_0}{K^2} [C_\lambda D_\lambda - B_\lambda (A_\lambda - 1)] : \Delta_2$ $Q_0 = \frac{q_0}{K} [A_\lambda (A_\lambda - 1) - C_\lambda^2] : \Delta_2$ $Q_\ell = \frac{q_0}{K} [A_\lambda (A_\lambda - 1) - B_\lambda D_\lambda] : \Delta_2$ $y_\ell = \frac{q_0}{K^2 EJ} [D_\lambda^2 - C_\lambda (A_\lambda - 1)] : \Delta_2$
	$M_0 = \frac{P_0}{K} [A_\lambda C_{K(\ell-a)} - D_\lambda D_{K(\ell-a)}] : \Delta_3$ $y_0 = \frac{P_0}{K^3 EJ} [B_\lambda D_{K(\ell-a)} - C_\lambda C_{K(\ell-a)}] : \Delta_3$ $M_\ell = \frac{P_0}{K} [C_\lambda A_{Ka} - A_\lambda C_{Ka}] : \Delta_3 ;$ $Q_\ell = P_0 [D_\lambda C_{Ka} - B_\lambda A_{Ka}] : \Delta_3$

	$M_0 = \frac{q_0}{K^2} D_\lambda : \Delta_3;$ $y_0 = \frac{q_0}{K^4 EJ} [C_\lambda D_\lambda - B_\lambda (A_\lambda - 1)] : \Delta_3$ $M_l = -\frac{q_0}{K^2} [A_\lambda D_\lambda + B_\lambda C_\lambda] : \Delta_3;$ $Q_l = \frac{q_0}{K} [D_\lambda^2 - B_\lambda^2] : \Delta_3$
$\Delta_1 = C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda;$ $\Delta_2 = A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda;$ $\Delta_3 = A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda;$	

2.9.3.2. Dao động cưỡng bức

Dưới đây chỉ xét trường hợp hệ chịu tác dụng của các lực kích thích điều hoà cùng tần số.

1. Dao động của dầm 1 nhịp

Biên độ phản lực liên kết của dầm 1 nhịp do lực kích thích điều hoà và dịch chuyển gối tựa biến đổi có dạng điều hoà ($z_0 \sin rt$) được cho trong bảng 2.9.2 và 2.9.4.

Hàm biểu diễn biên độ chuyển vị và nội lực động được xác định bằng công thức truy hồi:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(z) = y_0 A_{kz} + \frac{y'_0}{k} B_{kz} - \frac{M_0}{k^2 EJ} C_{kz} - \frac{Q_0}{k^3 EJ} D_{kz} - \frac{q_0}{k^4 EJ} (A_{kz} - 1) \\ y'(z) = ky_0 D_{kz} + y'_0 A_{kz} - \frac{M_0}{k EJ} B_{kz} - \frac{Q_0}{k^2 EJ} C_{kz} - \frac{q_0}{k^3 EJ} D_{kz} \\ M(z) = -k^2 EJ y_0 C_{kz} - k EJ y'_0 D_{kz} + M_0 A_{kz} + \frac{Q_0}{k} B_{kz} + \frac{q_0}{k^2} C_{kz} \\ Q(z) = -k^3 EJ y_0 B_{kz} - k^2 EJ y'_0 C_{kz} + k M_0 D_{kz} + Q_0 A_{kz} + \frac{q_0}{k} B_{kz} \end{array} \right. \quad (2.9.23)$$

trong đó:

y_0, y'_0, M_0, Q_0 - các thông số ban đầu, xác định từ bảng 2.9.2 và 2.9.4;

q_0 - biên độ tải trọng động phân bố đều;

$$K = \sqrt[4]{\frac{mr^2}{EJ}};$$

Trị của các hàm $A_{kz}, B_{kz}, C_{kz}, D_{kz}$ ứng với các z khác nhau cho trong bảng 2.9.5.

2. Dầm liên tục và khung phẳng

Hệ phương trình chính tắc dùng tính dầm liên tục và khung phẳng chịu các tải trọng động điều hòa cùng tần số theo phương pháp chuyển vị có dạng như khi tính với tải trọng tĩnh.

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P_0} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P_0} = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP_0} = 0 \end{cases} \quad (2.9.24)$$

trong đó:

r_{ik} - có ý nghĩa như trong (2.9.22);

R_{iP_0} - biên độ phản lực tại liên kết thêm vào thứ i do tải trọng động gây ra trên hệ cơ bản, trị số tra trong bảng 2.9.4.

Giải hệ phương trình (2.9.24), xác định được biên độ các chuyển vị động tại các nút. Sử dụng (2.9.23) thiết lập được các hàm biểu diễn sự biến thiên của biên độ chuyển vị và nội lực động cho từng thanh, từ đó vẽ được biểu đồ biên độ chuyển vị và nội lực động cho toàn hệ. Gặp hệ đối xứng ta vẫn đưa về giải một nửa hệ như đã biết.

Bảng 2.9.5: Bảng tra giá trị các hàm A_{mz} ; B_{mz} ; C_{mz} ; D_{mz}

kz	A_{kz}	B_{kz}	C_{kz}	D_{kz}
0,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,10	1,00000	0,10000	0,00500	0,00017
0,20	1,00007	0,200005	0,02000	0,001335
0,30	1,00034	0,30002	0,04500	0,00450
0,40	1,001065	0,400085	0,080005	0,010665
0,50	1,002605	0,500265	0,125025	0,020835
0,60	1,005405	0,600645	0,180065	0,036005
0,70	1,010005	0,70140	0,245165	0,05718
0,80	1,010707	0,802735	0,32036	0,085375
0,90	1,02735	0,904925	0,40574	0,121595
1,00	1,04169	1,008335	0,50139	0,166865
1,02	1,04513	1,029205	0,52176	0,177095
1,04	1,04878	1,05014	0,54256	0,18774
1,06	1,05264	1,07116	0,56377	0,19880
1,08	1,056735	1,09225	0,585405	0,21029
1,10	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222

Bảng 2.9.5 (tiếp)

kz	A_{kz}	B_{kz}	C_{kz}	D_{kz}
1,12	1,065625	1,134695	0,629945	0,234595
1,14	1,07044	1,15605	0,65285	0,24742
1,16	1,075525	1,17751	0,676185	0,26071
1,18	1,080875	1,19908	0,699955	0,27447
1,20	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,22	1,09243	1,24254	0,74878	0,30344
1,24	1,09865	1,26445	0,77385	0,318665
1,26	1,10518	1,286485	0,79939	0,334395
1,28	1,11203	1,30866	0,83531	0,35064
1,30	1,119205	1,33097	0,851705	0,36741
1,32	1,12673	1,35343	0,87855	0,38471
1,34	1,134595	1,37604	0,905845	0,40256
1,36	1,142835	1,398815	0,933595	0,420955
1,38	1,15144	1,421755	0,96180	0,439905
1,40	1,160435	1,444875	0,990465	0,459425
1,42	1,169825	1,468175	1,019595	0,479525
1,44	1,179615	1,49167	1,049195	0,50021
1,46	1,189835	1,515365	1,079265	0,521465
1,48	1,20048	1,539265	1,10981	0,543385
1,50	1,211575	1,563385	1,140835	0,565895
1,52	1,22312	1,587735	1,17235	0,589025
1,54	1,23514	1,612315	1,20435	0,612785
1,56	1,24764	1,63714	1,23684	0,63720
1,58	1,260635	1,662225	1,269835	0,662265
1,60	1,27413	1,68757	1,30333	0,68800
1,62	1,288155	1,713195	1,337335	0,714405
1,64	1,30271	1,73910	1,37186	0,74149
1,66	1,317815	1,765305	1,406905	0,769285
1,68	1,333485	1,791815	1,442475	0,797775
1,70	1,34971	1,818645	1,47658	0,826985
1,72	1,367575	1,84581	1,545225	0,85692
1,74	1,384015	1,972315	1,552415	0,887595

Bảng 2.9.5 (tiếp)

kz	A _{kz}	B _{kz}	C _{kz}	D _{kz}
1,76	1,40208	1,90115	1,59016	0,919025
1,78	1,120785	1,929405	1,628465	0,951205
1,80	1,440135	1,95801	1,667335	0,98416
1,82	1,460155	1,987015	1,706785	1,017905
1,84	1,43086	2,01642	1,7682	1,05244
1,86	1,502255	2,04625	1,787445	2,08778
1,88	1,524375	2,07652	1,828675	1,12394
1,90	1,54722	2,10723	1,87051	1,16093
1,92	1,570815	2,138415	1,912965	1,198765
1,94	1,59518	2,170065	1,95605	1,237455
1,96	1,62032	2,20222	1,99977	1,27701
1,98	1,646265	2,23489	2,044145	1,31745
2,00	1,673025	2,26808	2,089175	1,35878
2,02	1,70062	2,30181	2,13487	1,40102
2,04	1,72907	2,33611	2,18125	1,44418
2,06	1,758395	2,370985	2,228315	1,488275
2,08	1,78861	2,40645	2,27609	1,53332
2,10	1,81973	2,442535	2,32458	1,579325
2,12	1,851785	2,479215	2,373795	1,626305
2,14	1,884795	2,51661	2,423755	1,67428
2,16	1,918765	2,551615	2,474465	1,723265
2,18	1,95373	2,593365	2,52594	1,773265
2,20	1,989705	2,632805	2,578205	1,824305
2,22	2,02671	2,672965	2,63126	1,876395
2,24	2,064765	2,71388	2,685125	1,92956
2,26	2,10390	2,75556	2,73982	1,98381
2,28	2,144125	2,79801	2,795355	2,03916
2,30	2,18547	2,811335	2,85175	2,095625
2,32	2,227955	2,885465	2,909015	2,153235
2,34	2,27161	2,930455	2,96717	2,211995
2,36	2,31645	2,97634	3,02624	2,27193
2,38	2,362495	3,023125	3,086235	2,333055

Bảng 2.9.5 (tiếp)

kz	A _{kz}	B _{kz}	C _{kz}	D _{kz}
2,40	2,40978	3,070845	3,14717	2,395385
2,42	2,15932	3,119525	3,20907	2,458945
2,44	2,50814	3,1919	3,27296	2,52375
2,46	2,559275	3,21985	3,35845	2,58983
2,48	2,611745	3,271565	3,400755	2,657165
2,50	2,665575	3,324335	3,466715	2,720865
2,52	2,72079	3,37820	3,53374	2,79587
2,54	2,777415	3,43318	3,601855	2,86722
2,56	2,835485	3,8931	3,671075	2,93995
2,58	2,895025	3,546605	3,741435	3,014075
2,60	2,95606	3,05115	3,81295	3,089615
2,62	3,018615	3,66486	3,885645	3,16660
2,64	3,08273	3,72587	3,95955	3,24505
2,66	3,14843	3,78818	4,03469	3,32499
2,68	3,215745	3,85183	4,111085	3,40645
2,70	3,28470	3,91682	4,18877	3,48944
2,72	3,35533	3,983215	4,26777	3,574005
2,74	3,42767	4,051045	4,34811	3,660165
2,76	3,50175	4,12034	4,42982	3,74794
2,78	3,57760	4,191125	4,51293	3,837365
2,80	3,655255	4,263455	4,597475	3,928465
2,82	3,73475	4,33735	4,68348	4,02127
2,84	3,81612	4,412855	4,77098	4,115815
2,86	3,899395	4,49001	4,860005	4,21212
2,88	3,98461	4,568845	4,95059	4,310225
2,90	4,07181	4,649405	5,04277	4,410155
2,92	4,16103	4,73173	5,13658	4,51195
2,94	4,252305	4,81586	5,232055	4,61563
2,96	4,34567	4,90184	5,32923	4,72124
2,98	4,441165	4,98970	5,428135	4,82881
3,00	4,538835	5,079495	5,528825	4,938375
3,02	4,638715	5,17127	5,631335	4,05998

Bảng 2.9.5 (tiếp)

kz	A_{kz}	B_{kz}	C_{kz}	D_{kz}
3,04	4,74085	5,26506	5,73569	5,16364
3,06	4,845275	5,360915	5,841945	5,279415
3,08	4,95204	5,458885	5,95014	5,397335
3,10	5,06118	5,559015	6,06032	5,517435
3,12	5,17275	5,6135	6,17252	5,63976
3,14	5,286785	5,76594	6,2865	5,76435
3,16	5,403345	5,87284	6,40317	5,89125
3,18	5,522455	5,98209	6,521715	6,02049
3,20	5,64418	6,093755	6,64247	6,152125
3,22	5,76855	6,207875	6,765485	6,286205
3,24	5,89564	6,324515	6,89080	6,422765
3,26	6,02548	6,443725	7,01848	6,56185
3,28	6,15813	6,56555	7,14857	6,70352
3,30	6,29364	6,690065	7,28112	6,847815
3,32	6,43206	6,81732	7,41619	6,99478
3,34	6,57345	6,94737	7,55383	7,11448
3,36	6,71786	7,080275	7,69410	7,296955
3,38	6,865345	7,21610	7,837065	7,45226
3,40	7,01597	7,35491	7,98277	7,61045
3,42	7,169785	7,496765	8,131275	7,771585
3,44	7,32685	7,641725	8,28266	7,935725
3,46	7,48723	7,78986	8,43697	8,10291
3,48	7,65099	7,941235	8,59427	8,273225
3,50	7,81818	8,095925	8,75461	8,446705
3,52	7,98888	8,253985	8,91813	8,623425
3,54	8,16345	8,41550	9,084825	8,80345
3,56	8,31104	8,580535	9,25478	8,986845
3,58	8,52261	8,749165	9,42807	9,173665
3,60	8,70801	8,921470	9,60477	9,36399
3,62	8,897225	9,09751	9,784955	9,55788
3,64	9,090345	9,27738	9,968695	9,75541
3,66	9,287465	9,461155	10,156075	9,95665

Bảng 2.9.5 (tiếp)

kz	A _{kz}	B _{kz}	C _{kz}	D _{kz}
3,68	9,48864	9,64891	10,31717	10,16168
3,70	9,693955	9,840725	10,542055	10,370565
3,72	9,90340	10,036695	10,74082	10,583385
3,74	10,11742	10,236895	10,94355	10,800225
3,76	10,335525	10,441515	11,150325	11,020155
3,78	10,55819	10,650345	11,36124	11,246265
3,80	10,785405	10,863775	11,576375	11,475635
3,82	11,01725	11,081795	11,79582	11,709345
3,84	11,253805	11,304495	12,019675	11,947495
3,86	11,49518	11,531975	12,24803	11,190165
3,88	11,741445	11,764335	12,40985	12,437445
3,90	11,99271	12,001665	12,71864	12,689435
3,92	12,249055	12,244075	12,961085	12,946225
3,94	12,510585	12,491665	13,208435	13,207915
3,96	12,777405	12,744535	13,460785	13,474595
3,98	13,049605	13,002795	13,718255	13,746375
4,00	13,327295	13,26656	13,980935	14,02336
4,02	13,610575	13,53593	14,248955	14,30565
4,04	13,899555	13,811015	14,522415	14,593355
4,06	14,194345	14,091945	14,801435	14,886585
4,08	14,49506	14,37883	15,08613	15,18545
4,10	14,801805	14,67179	15,376625	15,49007
4,12	15,11470	14,970945	15,67304	15,800555
4,14	15,433865	15,27642	15,975505	16,11703
4,16	15,759425	15,588345	16,284145	16,439615
4,18	16,091495	15,90684	16,599085	16,76844
4,20	16,43020	16,232045	16,92046	17,103625
4,22	16,77568	16,56409	17,24841	17,44530
4,24	17,12806	16,90312	17,58307	17,79360
4,26	17,487465	17,24926	17,924585	18,14867
4,28	17,85405	17,602665	18,27309	18,510635
4,30	18,22794	17,96347	18,62874	18,87964

Bảng 2.9.5 (tiếp)

kz	A_{kz}	B_{kz}	C_{kz}	D_{kz}
4,32	18,60928	18,33183	18,99468	19,25583
4,34	18,998225	18,707895	19,362065	19,639355
4,36	18,39491	19,091815	19,74005	20,030365
4,38	18,79949	19,48374	20,12579	20,42901
4,40	20,21212	19,88385	20,51945	20,83545
4,42	20,63296	20,292285	20,92120	21,249845
4,44	21,06217	20,70922	21,33120	21,67235
4,46	21,49991	21,134825	21,74963	22,103145
4,48	21,94635	21,569275	22,17665	22,542395
4,50	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,52	22,86602	22,46540	23,05722	23,44695
4,54	23,33960	22,92744	23,51114	23,91262
4,56	23,822585	22,39905	23,974385	24,38746
4,58	24,31516	22,88041	24,44716	24,87166
4,60	24,817515	24,37172	24,929665	25,36541
4,62	25,32984	24,873175	25,42210	25,868915
4,64	25,852335	25,39498	25,924665	26,38236
4,66	26,38520	26,90734	26,43757	26,90597
4,68	26,92865	36,44046	26,96103	27,43994
4,70	27,48287	26,98456	27,49526	27,98448
4,72	28,048095	27,53985	28,040485	28,53982
4,74	28,62454	28,10655	28,59693	29,106175
4,76	29,21242	28,684905	29,16483	29,683775
4,78	29,811965	29,27513	29741405	30,27285
4,80	30,42341	29,877465	30,33591	30,873625
4,82	31,04699	30,492145	30,93959	31,486365
4,84	31,682945	31,119425	31,555685	32,111295
4,86	32,33153	31,75955	32,18445	32,75868
4,88	32,99298	32,41277	32,82615	33,39876
4,90	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181
4,92	34,35554	33,759565	34,14942	34,738095
4,94	35,057175	31,45367	34,831525	35,42788

Bảng 2.9.5 (tiếp)

kz	A _{kz}	B _{kz}	C _{kz}	D _{kz}
4,96	35,772745	35,161945	35,527655	36,131445
4,98	36,50253	35,88467	36,23810	35,84908
5,00	37,246805	36,622145	36,963145	37,581065
5,02	38,005865	37,374645	37,703085	38,327706
5,04	38,78001	38,14248	38,45823	39,08929
5,06	39,56954	38,92595	39,22889	39,86614
5,08	40,374765	39,725365	40,015375	40,658555
5,10	41,19599	40,54105	40,818010	41,46686
5,12	42,033545	41,373315	41,637125	42,291385
5,14	42,887755	42,22250	42,473055	43,13246
5,16	73,758955	43,08894	43,326145	43,99042
5,18	44,64749	43,97297	44,19673	44,86562
5,20	45,55370	44,874955	45,08518	45,758405
5,22	46,477945	45,79524	45,991855	46,66915
5,24	47,420585	46,734195	46,917115	47,598205
5,26	48,381995	47,69219	47,861345	48,54596
5,28	49,36255	48,66960	48,82493	49,51279
5,30	50,362635	49,66682	49,808265	50,49909
5,32	51,38265	50,68421	50,81174	51,50525
5,34	52,42298	51,722265	81,83577	52,531695
5,36	53,48405	52,781295	52,88077	53,578825
5,38	54,566275	53,861765	53,947165	54,647065
5,40	55,67008	54,994095	55,03539	55,736955
5,42	56,795895	56,088715	56,145875	56,848635
5,44	57,944175	57,236075	57,279085	57,982845
5,46	59,115365	58,406635	58,435475	59,139955
5,48	60,30993	59,60085	59,61551	60,32042
5,50	61,52831	60,81919	60,81967	61,52473
5,52	62,77108	62,062145	62,04844	62,753375
5,54	64,03864	63,33020	63,30232	64,00684
5,56	65,33152	64,623855	64,58182	65,285635
5,58	66,65021	65,943635	65,88745	66,590285

Bảng 2.9.5 (tiếp)

kz	A _{kz}	B _{kz}	C _{kz}	D _{kz}
5,60	67,99531	67,29004	67,21974	67,92131
5,62	36,36727	68,663625	68,57923	69,279255
5,64	70,76665	70,064915	69,966475	70,664665
5,66	72,19404	71,49448	71,38202	72,07810
5,68	73,649975	72,95287	72,826145	73,52014
5,70	75,13504	74,44067	74,30033	74,99136
5,72	76,64983	75,95847	75,80427	76,49235
5,74	78,19494	77,506865	77,33887	78,023735
5,76	79,770985	79,086475	78,904755	79,586115
5,78	81,378595	80,697915	80,502545	81,180135
5,80	83,018405	82,341835	2,132885	82,806435
5,82	84,69107	84,01887	83,79644	84,46567
5,84	86,397255	85,72970	85,493865	86,15852
5,86	88,137645	87,47499	87,255855	87,88566
5,88	89,91292	89,255435	88,99310	89,647785
5,90	91,72379	91,07174	90,79631	91,14562
5,92	93,570985	92,92463	92,636215	93,27988
5,94	95,455235	94,81483	94,513545	95,15132
5,96	97,37729	96,74309	96,42906	97,06068
5,98	99,33792	98,71018	98,38353	99,00874
6,00	101,337905	100,71687	100,377735	100,99629
6,01	102,352905	101,735315	101,389985	102,005115
6,02	103,37804	102,76396	102,41247	103,02412
6,03	104,41342	103,80281	103,44530	104,05340
6,04	105,459145	104,852265	104,488565	105,093065
6,06	107,582045	106,982605	106,606845	107,203945
6,07	108,65943	108,06381	107,68207	108,27538
6,08	109,747585	109,15583	108,768155	109,35762
6,09	110,84662	110,25879	109,86522	110,45078
6,10	111,95664	111,37280	110,97337	111,55496
6,11	113,07775	112,497965	112,092715	112,670285
6,12	114,21008	113,634395	113,22337	113,796855

Bảng 2.9.5 (tiếp)

kz	A_{kz}	B_{kz}	C_{kz}	D_{kz}
6,13	115,35373	114,78220	114,36541	111,93479
6,14	116,508815	115,941505	115,519015	116,084205
6,16	118,853755	118,295055	117,861335	118,417925
6,17	120,04385	119,489535	119,05025	119,602475
6,18	121,245845	120,69597	120,251165	120,79897
6,19	122,45987	121,91449	121,46421	122,00754
6,2	123,68601	123,11521	122,68950	123,22830
6,21	124,924475	124,38825	123,927155	124,46137
6,22	126,175305	125,64374	125,177305	125,70688
6,23	127,43866	126,91180	126,44007	126,96496
6,24	128,71465	128,19255	127,71558	128,235725
6,26	131,30508	130,792665	130,30535	130,815815
6,27	132,619775	132,11228	131,619865	132,12546
6,28	133,94763	133,445105	132,94764	133,448295

Bảng 2.9.6: Bảng tra giá trị các hàm μ_i để tính động lực học các khung và dầm liên tục

λ	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)$	$\mu_4(\lambda) = \varepsilon_2(\lambda)$	$\mu_5(\lambda)$	$\mu_6(\lambda) = \varepsilon_5(\lambda)$
1	2	3	4	5	6	7
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,10	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,20	1,00000	1,00001	0,99999	1,00001	0,99999	0,99995
0,30	0,99998	1,00003	0,99993	1,00003	0,99994	0,99977
0,40	0,99994	1,00009	0,99978	1,00014	0,99984	0,99927
0,50	0,99985	1,00022	0,99945	1,00032	0,99960	0,99821
0,60	0,99969	1,00046	0,99887	1,00067	0,99918	0,99630
0,70	0,99943	1,00086	0,99790	1,00124	0,99847	0,99314
0,80	0,99902	1,00146	0,99642	1,00211	0,99739	0,98828
0,90	0,99944	1,00235	0,99427	1,00339	0,99582	0,98121
1,00	0,99761	1,00358	0,99126	1,00517	0,99363	0,97133
1,10	0,99650	1,00525	0,98719	1,00758	0,99065	0,95796
1,20	0,99504	1,00744	0,98184	1,01075	0,98673	0,94034
1,30	0,99317	1,01026	0,97496	1,01483	0,98167	0,91762

Bảng 2.9.6 (tiếp)

λ	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)$	$\mu_4(\lambda) = \varepsilon_2(\lambda)$	$\mu_5(\lambda)$	$\mu_6(\lambda) = \varepsilon_5(\lambda)$
1	2	3	4	5	6	7
1,40	0,99079	1,01384	0,96627	1,02000	0,97525	0,88882
1,50	0,98784	1,01828	0,95547	1,02643	0,96723	0,85289
1,60	0,98422	1,02375	0,94223	1,03433	0,95734	0,80859
1,70	0,97983	1,03039	0,92618	1,04394	0,94525	0,75455
1,80	0,97455	1,03838	0,90692	1,05551	0,93060	0,68920
1,90	0,96826	1,04791	0,88400	1,06933	0,91298	0,61071
2,00	0,96083	1,05922	0,85694	1,08572	0,89188	0,51698
2,10	0,95210	1,07255	0,82519	1,10507	0,86671	0,40552
2,20	0,94189	1,08819	0,78815	1,12778	0,83678	0,27334
2,30	0,93000	1,10646	0,74512	1,15436	0,80120	0,11685
2,40	0,91622	1,12776	0,69533	1,18536	0,75891	-0,06838
2,50	0,90027	1,15252	0,63789	1,22146	0,70855	-0,28792
2,60	0,88187	1,18121	0,57178	1,26345	0,64838	-0,54885
2,70	0,86061	1,24465	0,49582	1,31227	0,57610	-0,86042
2,80	0,83618	1,25340	0,40859	1,36906	0,48864	-1,23499
2,90	0,80797	1,29844	0,30844	1,43520	0,38175	-1,68954
3,00	0,77540	1,35089	0,19336	1,51241	0,24937	-2,24817
3,10	0,73772	1,41217	0,06090	1,60282	0,08256	-2,94636
3,20	0,69399	1,18404	-0,09197	1,70914	-0,13252	-3,93880
3,30	0,61300	1,56877	-0,26908	1,93484	-0,41847	-5,01472
3,40	0,58322	1,66931	-0,47534	1,98444	-0,81502	-6,63059
3,50	0,51261	1,78959	-0,71717	2,16396	-1,39906	-8,98677
3,60	0,42845	1,93491	-1,00321	2,38160	-2,34150	-12,7620
3,70	0,32691	2,11269	-1,34530	2,64874	-4,11181	-19,8068
3,80	0,20271	2,33351	-1,76031	2,98173	-8,68383	-37,8450
3,90	0,04780	2,61310	-2,27304	3,40484	-47,5553	-190,688
4,00	-0,15008	2,97580	-2,92177	3,95573	19,4676	72,5892
4,10	-0,11099	3,46151	-3,76880	4,69608	9,17015	32,0149
4,20	-0,77004	4,14023	-4,92322	5,73426	6,39342	20,9844
4,30	-1,29502	5,14721	-6,59517	7,27962	5,09273	15,7435
4,40	-2,13568	6,78170	-9,24895	9,79564	4,33068	12,6071
4,50	-3,70212	9,86350	-14,1753	14,7521	3,812358	10,4603

Bảng 2.9.6 (tiếp)

λ	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)$	$\mu_4(\lambda) = \varepsilon_2(\lambda)$	$\mu_5(\lambda)$	$\mu_6(\lambda) = \varepsilon_5(\lambda)$
1	2	3	4	5	6	7
4,60	- 7,66550	17,7346	- 26,1922	26,7259	3,45603	8,84763
4,70	- 37,9477	78,2382	- 120,374	120,430	3,17311	7,54805
4,80	18,3018	- 34,3328	53,8390	- 53,9558	2,94125	6,43993
4,90	8,34376	- 14,1830	22,9053	- 23,2523	2,74520	5,41965
5,00	5,71862	9,37158	14,7866	- 15,3625	2,57221	4,52887
5,10	4,54448	- 7,04949	10,9712	- 11,7966	2,11419	3,64239
5,20	3,84172	- 5,73831	8,70237	- 9,80006	2,26523	2,76656
5,30	3,37489	- 4,90802	7,15699	- 8,55222	2,12066	1,87670
5,40	3,03685	- 4,34539	6,00243	- 7,72326	1,97654	0,95373
5,50	2,77590	- 3,94830	5,07780	- 7,15559	1,82925	- 0,02214
5,60	2,56393	- 3,66194	4,29505	- 6,76502	1,67518	- 1,07206
5,70	2,38420	- 3,45455	3,60123	- 8,50316	1,51016	- 2,22019
5,80	2,2596	- 3,30668	2,96183	- 6,34091	1,33058	- 3,49580
5,90	2,08186	- 3,20627	2,35258	- 6,26051	1,13003	- 4,93603
6,00	1,94654	- 3,14497	1,75508	- 6,25142	0,90164	- 6,59010
6,10	1,81579	- 3,11863	1,15419	- 6,30816	0,63564	- 8,52590
6,20	1,68609	- 3,12451	0,53635	- 6,42908	0,31810	- 10,8411

Bảng 2.9.6 (tiếp)

λ	$\mu_7(\lambda)$	$\varepsilon_3(\lambda)$	$\varepsilon_4(\lambda)$	$\varepsilon_6(\lambda)$	$\varepsilon_7(\lambda)$	$\varepsilon_8(\lambda)$
8	9	10	11	12	13	14
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,10	1,00000	1,00000	1,00000	0,9999 8	1,00000	0,99999
0,20	1,00002	0,99995	1,00002	0,99974	1,00007	0,99987
0,30	1,00011	0,99975	1,00009	0,99869	1,00038	0,99936
0,40	1,00034	0,99921	1,00027	0,99585	1,00119	0,99799
0,50	1,00082	0,99806	1,00067	0,98988	1,00290	0,99509
0,60	1,00170	0,99599	1,00139	0,97901	1,00602	0,98981
0,70	1,00315	0,99257	1,00257	0,96111	1,01116	0,98112
0,80	1,00537	0,98732	1,00439	0,93362	1,01906	0,96779
0,90	1,00862	0,97968	1,00704	0,89361	1,03057	0,94837
1,00	1,01316	0,96902	1,01074	0,83772	1,04667	0,92125
1,10	1,01931	0,95462	1,01575	0,7621	1,06850	0,88458
1,20	1,02743	0,93569	1,02234	0,66264	1,09733	0,83630

Bảng 2.9.6 (tiếp)

λ	$\mu_7(\lambda)$	$\varepsilon_3(\lambda)$	$\varepsilon_4(\lambda)$	$\varepsilon_6(\lambda)$	$\varepsilon_7(\lambda)$	$\varepsilon_8(\lambda)$
8	9	10	11	12	13	14
1,30	1,03792	0,91135	1,03083	0,53448	1,13462	0,77412
1,40	1,05125	0,88064	1,04157	0,37238	1,18201	0,69549
1,50	1,06794	0,84252	1,05495	0,17050	1,24142	0,59757
1,60	1,08859	0,79583	1,07141	- 0,07768	1,31504	0,47721
1,70	1,11391	0,73933	1,09144	- 0,37944	1,40540	0,33090
1,80	1,14470	0,67165	1,11557	- 0,74297	1,51549	0,15468
1,90	1,18194	0,59133	1,14442	- 1,17151	1,64887	- 0,05590
2,00	1,22675	0,49673	1,17870	- 1,69362	1,80980	- 0,30593
2,10	1,28054	0,38609	1,21920	- 2,30348	2,00346	- 0,60126
2,20	1,34499	0,25746	1,26683	- 3,02127	2,23621	- 0,94869
2,30	1,42221	0,10864	1,32266	- 3,86381	2,51603	- 1,35628
2,40	1,51486	- 0,06265	1,38794	- 4,85132	2,85300	- 1,83370
2,50	1,62631	- 0,25921	1,46412	- 6,00856	3,26008	- 2,39277
2,60	1,76099	- 0,48401	1,55296	- 7,36650	3,75427	- 3,04824
2,70	1,92479	- 0,74051	1,65655	- 8,96474	4,35821	- 3,81896
2,80	2,12566	- 1,03267	1,77743	- 10,8553	5,10279	- 4,72963
2,90	2,37573	- 1,36510	1,91871	- 13,1085	6,03118	- 5,81363
3,00	2,68795	- 1,74324	2,08425	- 15,8228	7,20554	- 7,11762
3,10	3,08906	- 2,17360	2,27887	- 19,1416	8,71851	- 8,70949
3,20	3,61495	- 2,66408	2,50873	- 23,2841	10,7144	- 10,6929
3,30	4,32616	- 3,22447	2,78172	- 28,6053	13,4304	- 13,2357
3,40	5,32940	- 3,86709	3,10821	- 35,7248	17,2849	- 16,6306
3,50	6,83166	- 4,60787	3,50200	- 45,8366	23,0905	- 21,4416
3,60	9,29380	- 5,46784	3,98191	- 61,5871	32,6572	- 28,9184
3,70	13,9908	- 6,47565	4,57418	- 90,2796	50,9940	- 42,5096
3,80	26,2273	- 7,67158	5,31656	- 162,264	98,9449	- 76,5449
3,90	131,076	- 9,11447	3,26517	- 764,081	510,816	- 360,744
4,00	- 50,0202	- 10,8945	7,50722	269,204	- 200,997	127,061
4,10	- 22,3504	- 13,1577	9,18569	108,347	- 92,4486	51,0506
4,20	- 15,0017	- 16,1590	11,5520	63,4671	- 63,7764	29,7927
4,30	- 11,6541	- 20,3881	15,0923	41,2098	- 50,8504	19,2100
4,40	- 9,77808	- 26,9254	20,8829	27,0861	- 43,7338	12,4612
4,50	- 8,60964	- 38,7254	31,8739	16,7007	- 39,4279	7,47032
4,60	- 7,83952	- 67,8215	60,0939	8,25542	- 36,7214	3,38788
4,70	- 7,31942	- 286,451	277,775	0,86832	- 35,0365	- 0,20327

Bảng 2.9.6 (tiếp)

λ	$\mu_7(\lambda)$	$\varepsilon_3(\lambda)$	$\varepsilon_4(\lambda)$	$\varepsilon_6(\lambda)$	$\varepsilon_7(\lambda)$	$\varepsilon_8(\lambda)$
8	9	10	11	12	13	14
4,80	- 6,96999	117882	- 127,584	- 5,95313	- 34,0673	- 3,53645
4,90	- 6,74570	45,4706	- 56,2845	- 12,5144	- 33,6417	- 6,75683
5,00	- 6,61931	26,0348	38,0519	- 19,0240	- 33,6611	- 9,96388
5,10	- 6,57441	16,5568	29,8773	- 25,6381	- 34,0712	- 13,2326
5,20	- 6,60156	10,6284	25,3614	- 32,4852	- 34,8473	- 16,6251
5,30	- 6,69622	6,33368	22,5990	- 39,6811	- 35,9872	- 20,1978
5,40	- 6,85771	2,89632	20,8558	- 47,3398	- 37,5073	- 24,0068
5,50	- 7,08877	- 0,06147	- 19,6777	- 55,5820	- 39,4429	- 28,1115
5,60	- 7,39562	- 2,74869	- 18,9619	- 64,5540	- 41,8496	- 32,5797
5,70	- 7,78837	- 5,29338	- 18,5690	- 74,3878	- 44,8078	- 37,4921
5,80	- 8,28201	- 7,78152	- 18,4354	- 85,3146	- 48,4303	- 42,9490
5,90	- 8,89804	- 10,2762	- 18,5245	- 97,5837	- 52,8743	- 49,0801
6,00	- 9,66722	- 12,8279	- 18,8176	- 111,542	- 58,3610	- 56,0589
6,10	- 10,6340	- 15,4813	- 19,3091	- 127,670	- 65,2074	- 64,1290
6,20	- 11,8642	- 18,2790	- 20,0042	- 146,659	- 73,8813	- 73,6279

2.10. LÝ THUYẾT ĐẪO VÀ TỬ BIẾN

2.10.1. Lý thuyết dẻo

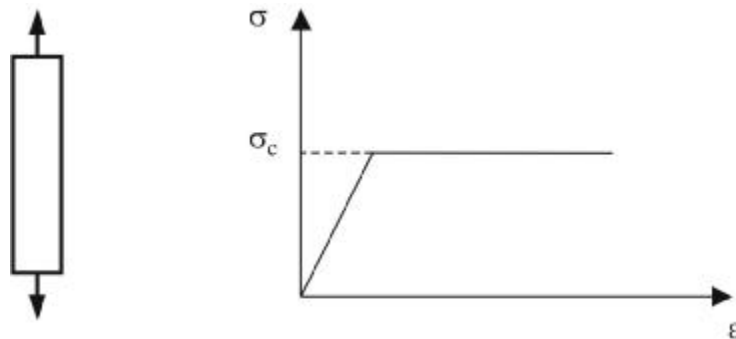
Lý thuyết dẻo (LTD) nghiên cứu cách tính toán kết cấu khi trong kết cấu xuất hiện biến dạng dẻo. Về nguyên tắc, để tìm ứng suất, biến dạng và chuyển vị LTD cũng xây dựng các phương trình cân bằng, hình học và vật lý như trong lý thuyết đàn hồi (LTĐH) trình bày ở mục 2.6. Khác biệt cơ bản giữa LTD và LTĐH thể hiện ở hai điểm:

- + LTD phải xây dựng thêm *điều kiện dẻo* (còn gọi là *tiêu chuẩn dẻo*) để biết ở vị trí nào trong kết cấu vật liệu bắt đầu xuất hiện biến dạng dẻo.
- + Do ở giai đoạn chảy dẻo biến dạng không còn tuân theo định luật Húc (Hook) nữa nên phương trình vật lý biểu diễn liên hệ giữa ứng suất và biến dạng trong LTD khác với phương trình vật lý biểu diễn liên hệ giữa ứng suất và biến dạng trong LTĐH.

1. Điều kiện dẻo

Điều kiện dẻo là tiêu chuẩn được thiết lập theo ứng suất tại một điểm để làm căn cứ nhận biết vật liệu tại điểm đó chuyển từ giai đoạn đàn hồi sang giai đoạn chảy dẻo.

Với thanh chịu lực dọc trục, vật liệu ở điểm bất kỳ trong thanh bước vào giai đoạn chảy dẻo khi ứng suất kéo hoặc nén tại đó đạt đến giới hạn chảy (σ_c). Với vật liệu đàn dẻo lý tưởng, quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong trường hợp chịu kéo dọc trục được biểu diễn ở hình 2.10.1.



Hình 2.10.1: Quan hệ σ - ϵ khi chịu kéo dọc trục với vật liệu đàn dẻo lý tưởng

Trường hợp chịu lực tổng quát điều kiện dẻo được biểu diễn ở dạng:

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, K) = 0 \quad (2.10.1)$$

trong đó K là hằng số vật liệu được xác định bằng thí nghiệm.

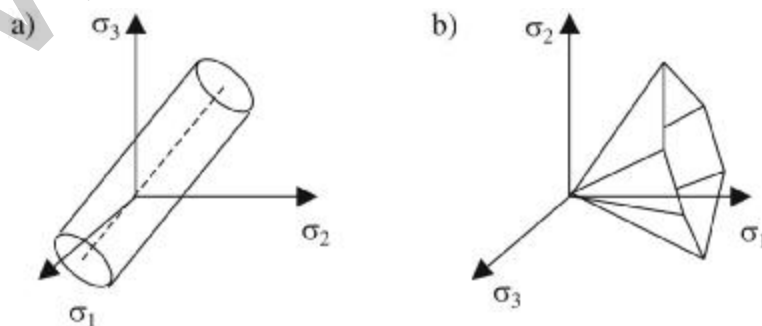
Hàm f được gọi là hàm dẻo, còn mặt xác định bởi phương trình (2.10.1) được gọi là mặt chảy dẻo. Dưới đây trình bày hai điều kiện dẻo thường được ứng dụng trong tính toán kết cấu kim loại hoặc đất nền.

a. Điều kiện dẻo Phôn Mi-zes (Von Mises)

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sqrt{2}\sigma_c \quad (2.10.2)$$

trong đó σ_c là giới hạn chảy của vật liệu trong trường hợp chịu lực dọc trục.

Trong không gian của hệ trục tọa độ có phương trùng với phương của ba ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ phương trình (2.10.2) biểu diễn một mặt trụ elíp có trục nghiêng đều với ba trục tọa độ (hình 2.10.2 a).



Hình 2.10.2: Mặt dẻo Mi-zes (a) và mặt dẻo Mo-Cu-lông (b)

b. Điều kiện dẻo Mo-Cu-lông (Mohr -Coulomb)

Điều kiện dẻo Mo-Cu-lông được biểu diễn qua ứng suất chính ở dạng:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| + \frac{1}{2}|\sigma_2 + \sigma_3|\sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \\ f_2 &= \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1| + \frac{1}{2}|\sigma_3 + \sigma_1|\sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \\ f_3 &= \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| + \frac{1}{2}|\sigma_1 + \sigma_2|\sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.10.3)$$

trong đó c và φ là lực dính và góc ma sát trong của đất xác định bằng thí nghiệm.

Trong không gian của hệ trục tọa độ có phương trùng với phương của ba ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ phương trình (2.10.3) biểu diễn một mặt chóp đáy lục giác có trục nghiêng đều với ba trục tọa độ (hình 2.10.2 b).

2. Phương trình vật lý

Trong lý thuyết dẻo tồn tại nhiều lý thuyết khác nhau, trong đó lý thuyết được sử dụng rộng rãi nhất là lý thuyết chảy dẻo. Theo lý thuyết này, với vật liệu đàn dẻo lý tưởng (hình 2.10.1) ở giai đoạn chảy dẻo biến dạng dẻo có giá trị rất lớn nên thay cho biến dạng dẻo sử dụng một đại lượng gọi là gia số biến dạng dẻo để xác định bằng công thức:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} & d\gamma_{xy} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \\ d\varepsilon_y &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} & d\gamma_{yz} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \\ d\varepsilon_z &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} & d\gamma_{zx} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

trong đó λ là một đại lượng vô hướng.

$\lambda = 0$ khi vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi,

$\lambda > 0$ khi vật liệu bước sang giai đoạn chảy dẻo.

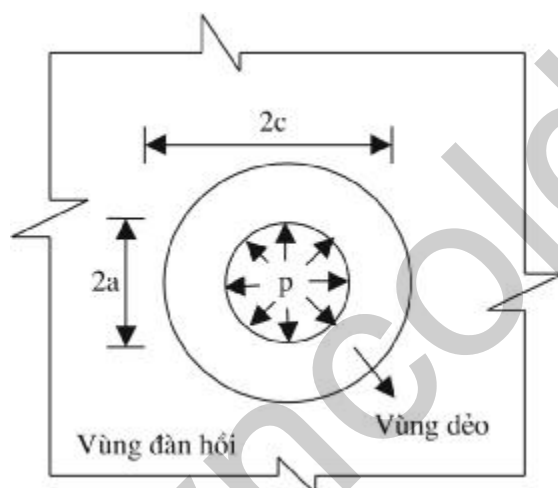
Biểu thức (2.10.2) cho liên hệ giữa biến dạng và ứng suất trong giai đoạn chảy dẻo. Đó chính là phương trình vật lý trong lý thuyết chảy dẻo.

Cần chú ý là công thức trên chỉ đúng với quá trình gia tải đơn, nghĩa là tất cả các tải trọng đặt vào kết cấu đều tuân theo quy luật gia tải tĩnh, chúng có giá trị tăng dần từ 0 đến giá trị xác định với cùng một tốc độ.

3. Phương pháp giải

Về nguyên tắc, dựa vào phương trình cân bằng, phương trình hình học, điều kiện dẻo, phương trình vật lý và điều kiện biên có thể tìm được nghiệm là ứng suất, biến dạng và chuyển vị của kết cấu khi xét đến biến dạng dẻo của vật liệu kết cấu. Trong tính toán công trình thường quan tâm đến hai loại bài toán sau:

- + Xác định vị trí và kích thước của vùng biến dạng dẻo. Ví dụ, với đường hầm chịu áp lực bên trong p như ở hình 2.10.3, tính toán đã chỉ ra rằng biến dạng dẻo bắt đầu xuất hiện ở mép trong và lan rộng trong vùng $a \leq r \leq c$, trong đó r là bán kính của vùng dẻo.



Hình 2.10.3: Vùng biến dạng dẻo quanh lỗ khoét

- + Xác định tải trọng giới hạn khi kết cấu đạt đến trạng thái cân bằng giới hạn, có nghĩa là giới hạn tối đa về mặt chịu lực. Bài toán này được áp dụng để xác định sức chịu của nền hoặc tính toán an toàn của mái dốc v.v...

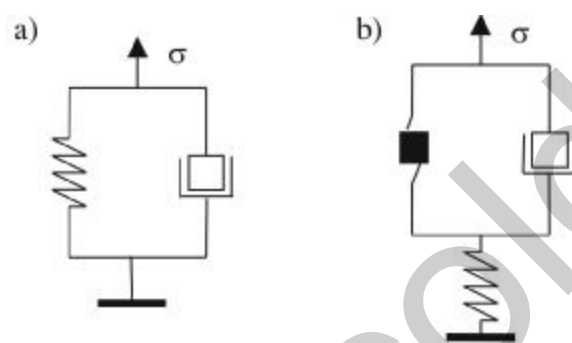
Điều cần nói ở đây là số bài toán của lý thuyết dẻo có thể giải được bằng phương pháp giải tích chỉ hạn chế ở những kết cấu có dạng hình học, dạng tải trọng và điều kiện biên không phức tạp. Ngoài những trường hợp này thường phải dùng phương pháp số, cụ thể là phương pháp phần tử hữu hạn trình bày ở mục 2.11.

2.10.2. Lý thuyết từ biến

1. Khái niệm

Biến dạng nghiên cứu trong lý thuyết đàn hồi và lý thuyết dẻo là biến dạng tức thời ngay sau khi đặt tải trọng vào kết cấu. Biến dạng này được xem như không thay đổi trong suốt thời gian kết cấu chịu tải trọng. Thực tế không phải như vậy, với một số loại vật liệu như thép làm việc trong điều kiện nhiệt độ cao, bê tông, đất, đá, vật liệu polyme... làm việc trong điều kiện nhiệt độ bình thường, mặc dù tải trọng giữ giá trị

không đổi trong suốt thời gian đặt tải biến dạng vẫn tăng một lượng đáng kể với tốc độ rất chậm. Hiện tượng này được gọi là từ biến (biến dạng chậm- creep). Từ biến của vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi được Ken-vin mô phỏng bởi biến dạng của cơ hệ gồm một lò xo và một xi lanh thủy lực (hình 2.10.3 a), trong đó biến dạng đàn hồi của lò xo mô tả biến dạng đàn hồi của vật liệu, biến dạng của xi lanh thủy lực mô tả từ biến của vật liệu. Từ biến của vật liệu đàn dẻo lý tưởng được mô phỏng bởi cơ hệ gồm một lò xo, một phanh ma sát và một xi lanh thủy lực (hình 2.10.2 b), trong đó phanh ma sát mô tả cơ chế chảy dẻo của vật liệu. Phanh ma sát ứng với tình huống vật liệu bước sang giai đoạn chảy dẻo.



Hình 2.10.3: Mô hình vật liệu đàn nhớt (a) và đàn dẻo nhớt (b)

Ngược lại của hiện tượng từ biến là hiện tượng chùng ứng suất (relaxation). Đây là hiện tượng muốn giữ nguyên biến dạng do ngoại lực hoặc ứng suất gây ra theo thời gian thì tương ứng phải giảm ngoại lực hoặc ứng suất đó.

2. Phương trình vật lý

Trong tính toán công trình thường sử dụng lý thuyết từ biến di truyền tuyến tính. Theo lý thuyết này biến dạng tại một thời điểm nào đó không chỉ phụ thuộc vào ứng suất ở tại thời điểm đó mà còn phụ thuộc vào lịch sử của biến dạng trước đó và được tính bằng công thức:

$$\epsilon^{tb}(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (2.10.3)$$

trong đó:

- Số hạng thứ nhất biểu diễn biến dạng tức thời ϵ_0 ở thời điểm t gây ra bởi ứng suất $\sigma(t)$;
- Số hạng thứ hai biểu diễn biến dạng phát triển theo thời gian gây ra bởi ứng suất biến đổi theo thời gian $\sigma(\tau)$;
- $K(t-\tau)$: Nhân từ biến, đặc trưng cho ảnh hưởng của tải trọng đặt ở thời điểm τ ở trước thời điểm t đến biến dạng ở thời điểm t .

Từ (2.10.3) suy ra:

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.10.4)$$

trong đó:

- Số hạng thứ nhất biểu diễn ứng suất ban đầu ở thời điểm t ;
- Số hạng thứ hai biểu diễn sự biến đổi của ứng suất theo thời gian khi biến dạng ε biến đổi theo thời gian;
- $R(t-\tau)$: Nhân chùng ứng suất, đặc trưng cho ảnh hưởng của biến dạng xuất hiện ở thời điểm τ đến ứng suất ở thời điểm t .

Trường hợp $\sigma = \text{const}$ từ (2.10.3) có:

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[\frac{1}{E_0} + \int_0^t K(t) dt \right]$$

Trường hợp $\varepsilon = \text{const}$ từ (2.10.4) có:

$$\sigma(t) = \varepsilon \left[E_0 - \int_0^t R(t) dt \right]$$

Về bản chất vật lý, hàm $K(t)$ là tốc độ biến dạng khi ứng suất có giá trị bằng đơn vị, còn hàm $R(t)$ là ứng suất cần thiết để gây ra biến dạng bằng đơn vị. $K(t)$ được xác định từ đường cong tốc độ biến dạng khi $\sigma = \text{const}$, còn $R(t)$ được xác định từ đường cong tốc độ chùng khi $\varepsilon = \text{const}$.

Với vật liệu được mô phỏng bởi mô hình Ken-vin tốc độ biến dạng từ biến là một hàm phụ thuộc vào ứng suất và biến dạng hiện tại.

Ở trạng thái ứng suất đơn hàm này được xác định bằng công thức:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a\sigma - b\varepsilon \quad (2.10.5)$$

trong đó a, b là các hằng số vật liệu xác định bằng thí nghiệm.

Biến dạng ở thời điểm $t + \Delta t$ được xác định bằng công thức:

$$\varepsilon_{t+\Delta t} = \varepsilon_t e^{-b\Delta t} + \sigma \frac{a}{b} (1 - e^{-b\Delta t}) \quad (2.10.6)$$

Ở bài toán biến dạng phẳng biến dạng ở thời điểm $t + \Delta t$ được xác định bằng công thức tương tự:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x, t+\Delta t} &= \varepsilon_{x, t} e^{-b\Delta t} + \left[\frac{1-\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)} \sigma_x + \frac{\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)} \sigma_y \right] \frac{a}{b} (1 - e^{-b\Delta t}) \\
\varepsilon_{y, t+\Delta t} &= \varepsilon_{x, t} e^{-b\Delta t} + \left[\frac{1-\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)} \sigma_y + \frac{\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)} \sigma_x \right] \frac{a}{b} (1 - e^{-b\Delta t}) \\
\gamma_{xy, t+\Delta t} &= \varepsilon_{x, t} e^{-b\Delta t} + \frac{1}{2(1+\mu)} \tau_{xy} \frac{a}{b} (1 - e^{-b\Delta t})
\end{aligned}
\tag{2.10.7}$$

3. Phương pháp giải

Nghiệm giải tích của bài toán từ biến cũng chỉ thu được cho những trường hợp đơn giản, với các trường hợp khác thường phải dùng phương pháp số. Khi giải chia khoảng thời gian xem xét thành nhiều thời đoạn và thực hiện tính toán cho từng thời đoạn. Trong mỗi thời đoạn thực hiện phép tính lặp để tính gần đúng ứng suất và biến dạng cho đến khi sai số của kết quả tính toán giữa hai bước lặp liên tiếp đạt trị cho phép.

2.11. PH- ƠNG PHÁP SỐ GIẢI CÁC BÀI TOÁN KẾT CẤU

2.11.1. Mở đầu

Với kết cấu hệ thanh siêu tĩnh các phương pháp truyền thống của Cơ học kết cấu như phương pháp lực, phương pháp chuyển vị... về nguyên tắc có thể giải kết cấu bất kỳ, nhưng với các kết cấu phức tạp thì không thể tính bằng tay mà tính bằng máy thì khó xây dựng một phần mềm để có thể giải cho nhiều loại kết cấu. Với các kết cấu tấm, vỏ, kết cấu dạng khối hoặc kết cấu được đưa về giải ở dạng bài toán phẳng, để tìm chuyển vị và nội lực hoặc ứng suất của kết cấu, phương pháp truyền thống của Lý thuyết đàn hồi là thiết lập phương trình vi phân của chuyển vị hoặc ứng suất, sau đó giải các phương trình này để tìm dạng giải tích của hàm biểu diễn các đại lượng đó. Song số bài toán có thể giải để thu được lời giải ở dạng giải tích mà thường quen gọi là lời giải chính xác chỉ hạn chế ở những trường hợp kết cấu có dạng hình học, liên kết và tải trọng không phức tạp. Để khắc phục hạn chế của các phương pháp truyền thống dùng trong Cơ học kết cấu và Lý thuyết đàn hồi, từ những năm 60 của thế kỷ XX, khi máy tính điện tử bắt đầu phát triển, nhiều phương pháp gần đúng giải bằng số trên máy tính cũng được phát triển. Khác với phương pháp giải tích, phương pháp số không tìm dạng giải tích của hàm chuyển vị hoặc ứng suất mà tìm trị của các hàm đó ở một tập hữu hạn các điểm trong kết cấu. Vị trí của các điểm do người tính tự chọn theo yêu cầu tính toán.

Ba phương pháp số thường được dùng để giải các bài toán kết cấu là phương pháp sai phân hữu hạn (SPHH), phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) và phương pháp phần tử biên (PTB), trong đó ứng dụng phổ biến nhất là phương pháp PTHH. Trong khuôn khổ cuốn sách này chỉ trình bày phương pháp PTHH.

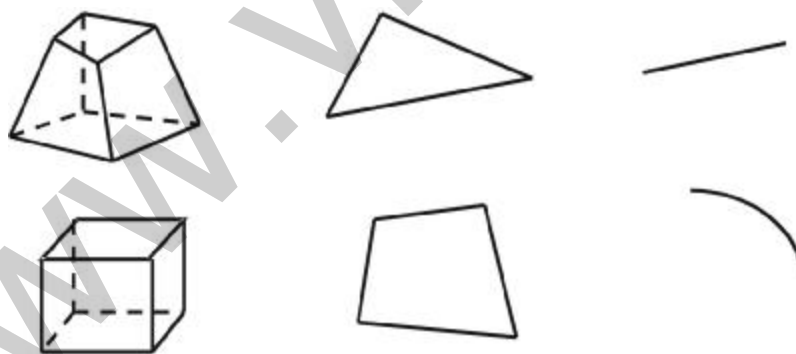
2.11.2. Cơ sở của phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH)

1. Nguyên lý chung

Khi tính bằng phương pháp PTHH kết cấu được chia thành nhiều phần nhỏ, mỗi phần được gọi là một *phần tử* (*element*). Các phần tử thường được chọn có dạng hình học đơn giản. Chẳng hạn, với kết cấu hệ thanh phần tử thường được chọn là một đoạn của thanh. Với tấm, vỏ hoặc bài toán phẳng (ứng suất phẳng, biến dạng phẳng) thường chọn phần tử có dạng tam giác hoặc tứ giác. Với kết cấu dạng khối thường chọn phần tử có dạng khối chóp hoặc lăng trụ... (hình 2.11.1).

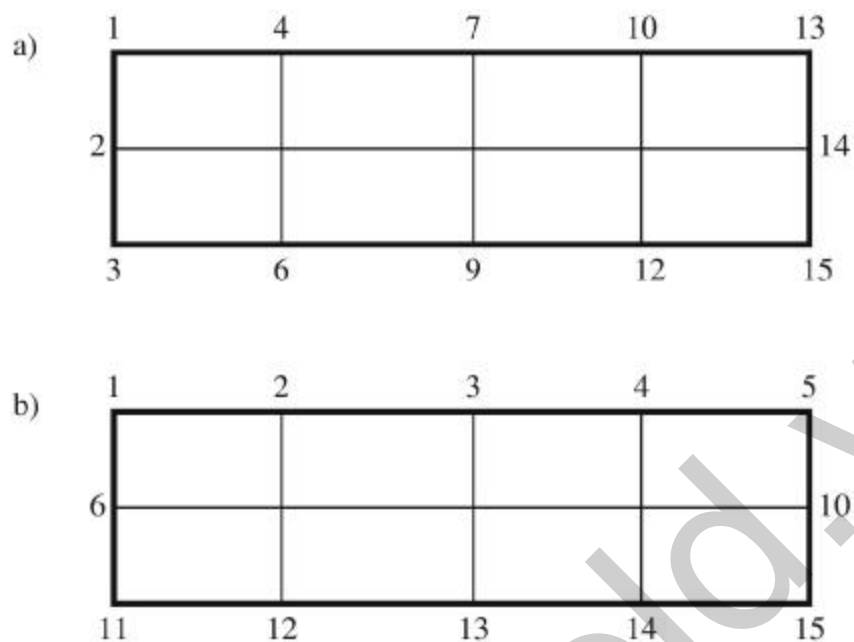
Các phần tử được xem như chỉ được nối với nhau ở điểm chia giữa hai đoạn (phần tử thanh), ở đỉnh của tam giác, tứ giác, đỉnh của khối chóp, khối lăng trụ (phần tử phẳng hoặc khối). Các điểm này được gọi là các *điểm nút* (*node*) của mạng lưới phần tử. Trong một số trường hợp nút còn được chọn thêm là một số điểm ở trên đoạn (phần tử thanh), trên cạnh (phần tử tam giác, tứ giác hoặc phần tử khối).

Về nguyên tắc, lưới phần tử càng dày, số điểm nút càng nhiều thì độ chính xác của kết quả càng lớn. Tuy vậy, trong thực tế áp dụng cũng không cần phải chia lưới phần tử quá dày. Mặt khác, không nhất thiết phải chia các phần tử có kích thước như nhau mà nên dùng lưới phần tử có kích thước nhỏ ở những vùng hàm phải tìm có khả năng biến thiên mạnh về giá trị, ví dụ vùng xung quanh các lỗ khoét trong thân đập, vùng gần các vị trí đặt tải tập trung... còn ở các vùng khác thì dùng lưới phần tử có kích thước lớn hơn. Như vậy vừa đạt độ chính xác cao, vừa giảm được kích thước của bài toán phải giải.



Hình 2.11.1: Một số dạng phần tử thường dùng

Để xác định vị trí của phần tử và điểm nút trong mạng lưới phần tử **mỗi phần tử và mỗi điểm nút được đánh một số mã**. Cách đánh số mã đơn giản nhất là dùng các số tự nhiên 1, 2, 3... để gán cho mỗi phần tử và mỗi điểm nút. Thứ tự đánh số không ảnh hưởng đến độ chính xác của kết quả. Riêng với nút, nếu kết cấu có dạng dài và hẹp nên chọn thứ tự đánh số nút theo chiều hẹp (hình 2.11.2 a). Với cách đánh số này máy sẽ tốn ít thời gian giải hơn so với cách đánh số thứ tự nút theo chiều dài (hình 2.11.2 b).



Hình 2.11.2: Cách đánh các mã nút

Về cách giải, phương pháp PTHH là một phương pháp gần đúng. Ý nghĩa gần đúng thể hiện ở chỗ trong miền của một phân tử chọn một hàm nào đó để biểu diễn gần đúng dạng của hàm phải tìm trong miền của phân tử đó. Hàm được chọn gọi là hàm xấp xỉ. Để đơn giản, dạng của hàm thường được chọn là một đa thức nguyên. Bậc của đa thức lấy đủ lớn để thoả mãn điều kiện hội tụ của lời giải. Thông thường, với mỗi dạng kết cấu phải chọn một dạng bậc của đa thức. Ẩn của bài toán là hệ số của đa thức. Vấn đề đặt ra là phải xác định các hệ số này để hàm xấp xỉ mô tả sát nhất dạng của hàm thực. Khác với các phương pháp gần đúng khác, ở phương pháp PTHH các hệ số của đa thức nguyên được biểu diễn qua các giá trị của hàm phải tìm tại vị trí các điểm nút của phân tử. Do đó, để tìm dạng của hàm xấp xỉ, thay cho tìm hệ số của đa thức đi tìm giá trị của hàm phải tìm tại vị trí các điểm nút.

Cần nhấn mạnh ở đây là việc tìm hàm xấp xỉ chỉ là cơ sở toán học của phương pháp giải, còn thực tế sau khi tìm được ẩn là giá trị của hàm tại các điểm nút thì có thể kết thúc việc giải, vì thông qua các giá trị này có thể nhận biết và đánh giá biến thiên của hàm trong miền xác định của nó.

Trong bài toán kết cấu, tùy theo ý nghĩa vật lý của hàm xấp xỉ định tìm là chuyển vị, ứng suất hoặc cả hai, người ta sử dụng ba loại mô hình sau: mô hình tương thích, mô hình cân bằng và mô hình hỗn hợp. Trong ba mô hình trên thì mô hình tương thích được sử dụng rộng rãi nhất. Trong mô hình tương thích hàm được chọn biểu diễn xấp xỉ là chuyển vị trong phạm vi một phân tử, các hệ số của đa thức xấp xỉ được biểu diễn thông qua chuyển vị ở các nút của phân tử. Ẩn của bài toán được chọn là chuyển vị tại các điểm nút.

Để gọn trong cách biểu diễn, phương pháp PTHH thường sử dụng ký hiệu ma trận để viết các biểu thức hoặc các phương trình tính toán. Cụ thể là thay cho việc viết các phân tử của một dãy sử dụng chữ cái ký hiệu dãy đó, thay thế cho việc viết các phân tử của một ma trận sử dụng chữ cái ký hiệu ma trận đó, thay cho diễn giải một biểu thức hoặc một hệ phương trình sử dụng ký hiệu nhân ma trận v.v...

Dưới đây sử dụng ký hiệu ma trận để viết phương trình hình học (2.6.3) và phương trình vật lý (2.6.7) của lý thuyết đàn hồi là hai phương trình được sử dụng để thiết lập phương trình giải bằng phương pháp PTHH.

Phương trình hình học: Nếu gọi

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad \text{là vectơ biến dạng;}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{là vectơ chuyển vị;}$$

$$\boldsymbol{\partial}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & & & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & & & & \\ & & \frac{\partial}{\partial z} & & & \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & & & & \\ & & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & & \\ \frac{\partial}{\partial x} & & \frac{\partial}{\partial z} & & & \end{bmatrix} \quad \text{là ma trận chuyển vị của ma trận toán tử vi phân } \partial;$$

thì phương trình hình học (2.6.3) được viết gọn lại ở dạng ma trận như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{u} \tag{2.11.1}$$

Phương trình vật lý: Nếu gọi

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \text{ là vectơ ứng suất}$$

$$D = \frac{E}{(1-2\mu)(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \text{ là ma trận}$$

đàn hồi của vật liệu thì phương trình vật lý (2.6.7) được viết gọn lại ở dạng ma trận như sau:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (2.11.2)$$

Nhìn vào dạng của ma trận D ta thấy ở trường hợp vật liệu đàn hồi tuyến tính D là ma trận đối xứng và các phần tử của D là hằng số.

2. Hàm xấp xỉ

Như đã nói ở trên, khi tính kết cấu bằng phương pháp PTHH thường chọn hàm xấp xỉ là chuyển vị trong miền của một phần tử. Với mỗi dạng phần tử ứng với một dạng kết cấu cần chọn một đa thức nguyên có bậc thích hợp để đảm bảo điều kiện hội tụ của lời giải (xem mục 2.11.3). Tuy vậy, nếu sử dụng ký hiệu ma trận có thể biểu diễn các hàm xấp xỉ này ở cùng một dạng:

$$u = Pa \quad (2.11.3)$$

trong đó:

u - vectơ chuyển vị trong phạm vi một phần tử;

P - ma trận đa thức có số hàng bằng số thành phần chuyển vị, số cột bằng số số hạng của đa thức xấp xỉ (xem mục 2.11.3);

a - vectơ hệ số của đa thức xấp xỉ có số phần tử bằng số số hạng của đa thức xấp xỉ (xem mục 2.11.3).

Để biểu diễn hệ số của đa thức qua chuyển vị ở các nút phần tử chỉ việc thay toạ độ và chuyển vị của các nút vào biểu thức (2.11.3), tiếp đó rút ra biểu thức tính a :

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\Delta_e \quad (2.11.4)$$

trong đó:

\mathbf{C}^{-1} - ma trận nghịch đảo của ma trận tọa độ \mathbf{C} có được sau khi thay tọa độ của các nút vào các biến tọa độ trong ma trận \mathbf{P} ;

Δ_e - vectơ chuyển vị nút của phần tử có các thành phần là các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử.

Thay (2.11.4) vào (2.11.3) được:

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}\Delta_e \quad (2.11.5)$$

Đây là dạng của hàm xấp xỉ chuyển vị trong phạm vi phần tử được biểu diễn qua chuyển vị nút của phần tử viết bằng ký hiệu ma trận.

Nếu gọi Δ là vectơ chuyển vị nút của kết cấu có các thành phần là các thành phần chuyển vị ở tất cả các nút của mạng lưới phần tử thì liên hệ giữa vectơ chuyển vị nút của một phần tử Δ_e với vectơ chuyển vị nút Δ của kết cấu được biểu diễn bằng công thức:

$$\Delta_e = \mathbf{L}_e\Delta \quad (2.11.6)$$

trong đó \mathbf{L}_e là ma trận định vị chuyển vị nút của phần tử trong vectơ chuyển vị nút của kết cấu. Ma trận \mathbf{L}_e có số hàng bằng số thành phần chuyển vị nút của phần tử, số cột bằng số thành phần chuyển vị nút của kết cấu. Phần tử của \mathbf{L}_e có giá trị bằng 1 nếu ứng với phần tử đó chuyển vị nút của phần tử có mặt trong vectơ chuyển vị nút của kết cấu, bằng 0 nếu như ứng với phần tử đó chuyển vị nút của phần tử không có mặt trong chuyển vị nút của kết cấu.

Thay (2.11.6) vào (2.11.5) được biểu thức của hàm xấp xỉ chuyển vị trong phạm vi phần tử biểu diễn qua chuyển vị nút của kết cấu:

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{L}_e\Delta \quad (2.11.7)$$

Ví dụ, với thanh chịu lực dọc phân bố đều cường độ tải trọng q vẽ ở hình 2.11.3 được chia thành 4 phần tử và hàm xấp xỉ chuyển vị trong phạm vi một phần tử được chọn ở dạng:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2x$$

thì các biểu thức (2.11.3) đến (2.11.6) được viết ở dạng ma trận như sau:

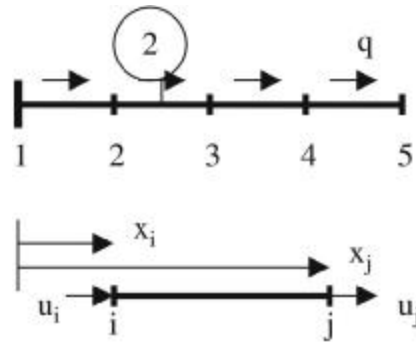
Hàm xấp xỉ chuyển vị nút

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{a}$$

trong đó:

$$P = [1 \quad x]$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



Hình 2.11.3

Vectơ chuyển vị nút của một phần tử:

$$\Delta_e = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

Ma trận tọa độ của một phần tử:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}$$

Vectơ chuyển vị nút của kết cấu:

$$\Delta = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

Vectơ chuyển vị nút và ma trận định vị của phần tử thứ 2:

$$\Delta_e = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rõ ràng là

$$\Delta_2 = L_2 \Delta.$$

3. Phương trình cơ bản của phương pháp PTHH

Phương trình cơ bản của phương pháp PTHH là phương trình được thiết lập để tìm giá trị gần đúng của ẩn sao cho giá trị này tiếp cận tốt nhất với giá trị chính xác của ẩn. Có một số tiêu chuẩn toán học được thiết lập cho điều kiện đó. Với bài toán kết cấu, La-gơ-răng đã chứng minh rằng: “*Khi các điều kiện cân bằng và các điều biên được thoả mãn, giá trị của chuyển vị gần đúng được lựa chọn (còn được gọi là chuyển vị khả dĩ) sẽ là chuyển vị thực (nghiệm chính xác) nếu tổng công khả dĩ của ngoại lực và nội lực trong toàn kết cấu ứng với chuyển vị đó bằng 0*”. Phát biểu này là nội dung của nguyên lý biến phân La-gơ-răng. Dưới đây sẽ trình bày cách dựa vào nguyên lý này để thiết lập phương trình tìm ẩn là chuyển vị nút của kết cấu.

Nếu gọi V_e là thể tích của một phần tử, ε là vectơ biến dạng, σ là vectơ ứng suất, u là vectơ chuyển vị, p là vectơ lực thể tích (ngoại lực) thì tổng công khả dĩ Π_e của phần tử được tính bằng công thức:

$$\Pi_e = \int_{V_e} \varepsilon^T \sigma dV - \int_{V_e} u^T p dV \quad (2.11.8)$$

trong đó: số hạng thứ nhất ở vế trái là công khả dĩ nội lực, số hạng thứ hai là công khả dĩ ngoại lực.

Vì biến dạng được xác định qua chuyển vị thông qua phương trình hình học, ứng suất được xác định qua biến dạng thông qua phương trình vật lý nên tổng công khả dĩ có thể được xác định hoàn toàn theo chuyển vị. Cụ thể như sau:

Thay (2.11.7) vào (2.11.1) được biểu thức xác định biến dạng trong phạm vi phần tử biểu diễn qua chuyển vị nút của kết cấu:

$$\varepsilon = \partial^T P C^{-1} L_e \Delta = B L_e \Delta \quad (2.11.9)$$

trong đó: $B = \partial^T P C^{-1}$ được gọi là ma trận biến dạng.

Thay (2.11.10) vào (2.11.2) được biểu thức xác định ứng suất trong phạm vi phần tử biểu diễn qua chuyển vị nút của kết cấu:

$$\sigma = D B L_e \Delta \quad (2.11.10)$$

Thay (2.11.7), (2.11.9) và (2.11.10) vào (2.11.8) được biểu thức tính công biến dạng khả dĩ của phần tử biểu diễn qua chuyển vị:

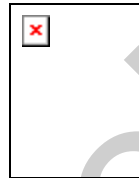
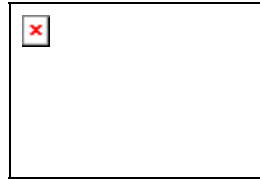
$$\Pi_e = \Delta^T L_e^T K_e L_e \Delta + \Delta^T L_e^T F_e \quad (2.11.11)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} K_e &= \int_{V_e} B^T D B dV \\ F_e &= \int_{V_e} C^{-1T} P^T p dV \end{aligned} \quad (2.11.12)$$

K_e được gọi là ma trận cứng phần tử, F_e được gọi là vectơ tải trọng nút của phần tử. Phần tử có bao nhiêu chuyển vị nút thì ma trận K_e có bấy nhiêu hàng, bấy nhiêu cột và vectơ F_e có bấy nhiêu thành phần. Vì D là ma trận đối xứng nên K_e là ma trận đối xứng.

Ví dụ, với phần tử thanh chịu lực dọc (hình 2.11.3), mỗi phần tử có 2 thành phần chuyển vị nút, dọc theo thanh có tải trọng phân bố đều cường độ q thì ma trận cứng, vectơ chuyển vị nút và vectơ tải phần tử có dạng:



trong đó:

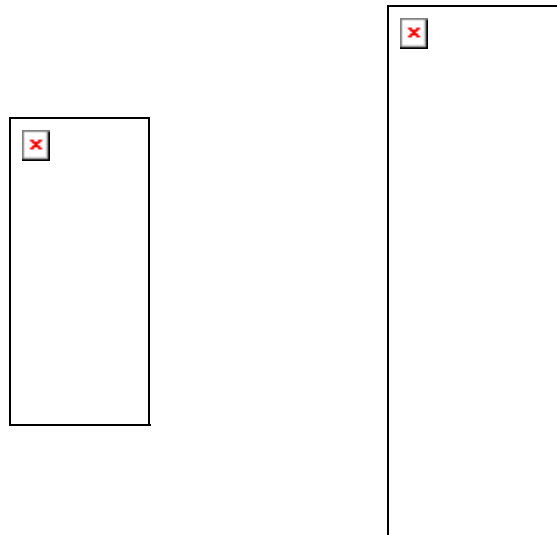
EF - độ cứng của thanh chịu lực dọc;

l - chiều dài của phần tử;

u - chuyển vị dọc theo trục thanh tại đầu nút phần tử.

Còn với phần tử thanh dẹt để tính hệ khung phẳng trình bày ở mục 2.11.3, mỗi phần tử có 6 thành phần chuyển vị nút, dọc theo thanh có tải trọng phân bố đều dọc trục thanh là q và vuông góc với trục thanh là p thì ma trận cứng, vectơ chuyển vị nút và vectơ tải phần tử có dạng:





trong đó:

EF - độ cứng của thanh chịu lực dọc;

EJ - độ cứng của thanh chịu uốn;

l - chiều dài của phần tử;

u - chuyển vị dọc theo trục thanh;

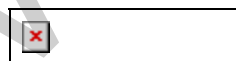
v - chuyển vị vuông góc với trục thanh;

φ - góc xoay của mặt cắt ngang ở đầu mút phần tử.

Nếu kết cấu được chia thành n_c phần tử, tổng công biến dạng khả dĩ của kết cấu sẽ bằng tổng công biến dạng của các phần tử đó. Đặt Δ^T làm thừa số chung ta được:



hoặc



(2.11.13)

trong đó:



(2.11.14)

được gọi là *ma trận độ cứng của kết cấu*, còn:

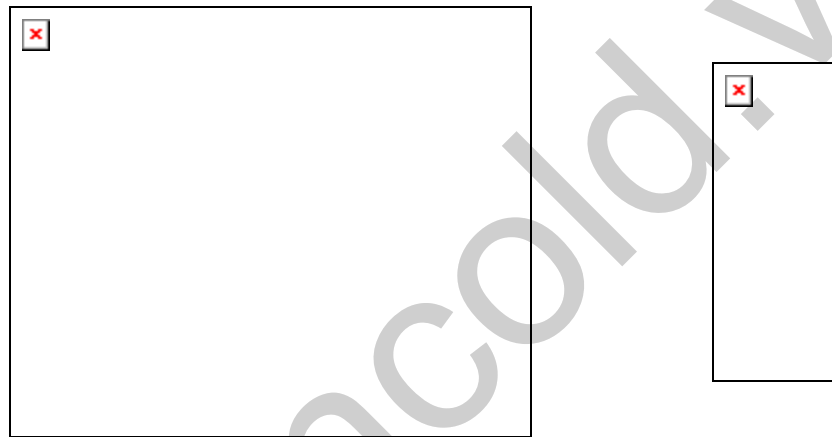


(2.11.15)

được gọi là *vector tải trọng nút của kết cấu*.

Về thực chất, (2.11.14) và (2.11.15) là biểu diễn toán học của việc sắp xếp ma trận cứng phần tử vào ma trận cứng của kết cấu và vectơ tải phần tử vào vectơ tải kết cấu tương ứng với các thành phần chuyển vị nút phần tử trong vectơ chuyển vị nút của kết cấu. Trong quá trình sắp xếp, các phần tử của ma trận cứng phần tử hoặc vectơ tải phần tử tương ứng với cùng một chuyển vị nút trong mạng lưới phần tử (có cùng vị trí hàng và cột trong ma trận cứng kết cấu hoặc cùng vị trí hàng trong vectơ tải kết cấu) được cộng lại.

Ví dụ, với thanh chịu lực dọc như hình 2.11.3 sau khi sắp xếp các ma trận cứng phần tử và vectơ tải phần tử vào ma trận cứng và vectơ tải của kết cấu bằng cách trên hoặc sử dụng các công thức (2.11.14) và (2.11.15) được kết quả:



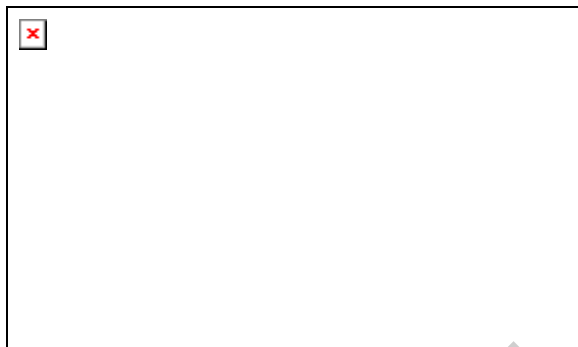
Theo nguyên lý La-gơ-răng Δ sẽ là chuyển vị thực của kết cấu nếu công khả dĩ ứng với nó bằng 0. Vì nên từ (2.11.13) rút ra:

$$K\Delta = F \quad (2.11.16)$$

Phương trình (2.11.16) là phương trình để xác định ẩn là chuyển vị Δ tại các nút và được gọi là *phương trình cơ bản của phương pháp PTHH*. Về thực chất đây là phương trình cân bằng lực tại các nút được biểu diễn qua chuyển vị nút, trong đó tích $K\Delta$ biểu diễn vectơ nội lực nút, còn F biểu diễn vectơ tải trọng nút. *Kết cấu có bao nhiêu chuyển vị nút thì ma trận K có bấy nhiêu hàng, bấy nhiêu cột và vectơ F có bấy nhiêu thành phần. Vì K_e là ma trận đối xứng nên K là ma trận đối xứng. Mặt khác K thường có dạng băng đường chéo chính, bề rộng băng phụ thuộc vào dạng của kết cấu và vào cách đánh số mã chuyển vị nút của kết cấu. Với kết cấu có dạng dài và hẹp (hình 2.11.2) nếu đánh số mã nút theo chiều hẹp thì bề rộng băng sẽ nhỏ hơn đánh số theo chiều dài và do vậy giải hệ phương trình (2.11.16) sẽ tốn ít thời gian hơn.*

Chú ý là trong vectơ chuyển vị nút Δ có chứa các thành phần chuyển vị nút bị ràng buộc ở vị trí các nút có liên kết trên biên, trước khi giải hệ phương trình (2.11.16) phải thay thế các giá trị chuyển vị này vào hệ phương trình, nếu không định thức của ma trận K sẽ bằng 0 và hệ phương trình trên trở thành vô định. Về mặt vật lý, việc thay giá trị của các chuyển vị tại vị trí các liên kết vào phương trình có nghĩa là đưa các liên

kết để ràng buộc chuyển vị của kết cấu, nếu không chuyển vị của kết cấu sẽ là vô định. Về mặt toán học, việc thay thế chuyển vị bằng 0 tại vị trí các liên kết là sự loại bỏ các hàng các cột của hệ phương trình (2.11.6) tương ứng với chuyển vị này. Ví dụ với thanh chịu kéo (hình 2.11.3), vì chuyển vị tại nút 1 (ngàm) bằng 0 nên phải xoá hàng 1, cột 1 của hệ phương trình (2.11.6) viết cho kết cấu này. Kết quả được hệ phương trình:



Sau khi xác định được chuyển vị nút tính ứng suất trong phạm vi phần tử bằng công thức (2.11.10).

4. Các bước tính toán

Có thể hệ thống các bước tính kết cấu bằng phương pháp PTHH lại như sau:

- + Chia kết cấu thành các phần tử. Đánh số mã phần tử và mã nút.
- + Thiết lập ma trận cứng phần tử, vectơ tải phần tử theo (2.11.12), ma trận cứng kết cấu theo (2.11.14), vectơ tải kết cấu theo (2.11.15).
- + Thay thế các giá trị của các chuyển vị tại vị trí các nút có liên kết vào hệ phương trình (2.11.16), sau đó giải hệ phương trình này để xác định các thành phần của vectơ chuyển vị nút Δ .
- + Xác định ứng suất bằng (2.11.10).

Cần nói thêm là sau khi xác định được các giá trị chuyển vị và ứng suất thường biểu diễn các giá trị này ở dạng đồ họa để tiện xem và đánh giá kết quả.

5. Xây dựng phần mềm

Các bước tính trong phương pháp PTHH đều được lập trình để thực hiện trên máy tính. Hiện nay có nhiều phần mềm tính toán kết cấu bằng phương pháp PTHH được bán trên thị trường như SAP, ANSYS, WSKC... Song có thể thấy hầu hết các phần mềm đều được cấu trúc từ các khối chức năng sau:

a. Khối nhập dữ liệu

Chứa các lệnh nhập sơ đồ hình học, kích thước, vật liệu và liên kết của kết cấu. Phương thức thường dùng là nhập ở dạng đồ họa, người tính vẽ sơ đồ kết cấu, tải trọng và liên kết trên màn hình như vẽ trên giấy thông qua menu hoặc nút lệnh. Trị của tải trọng, của các hằng số vật liệu như mô đun đàn hồi E, hệ số nền... được nhập thông qua các biểu bảng (form) thiết kế sẵn (hình 2.11.4).

b. Khối xử lý dữ liệu

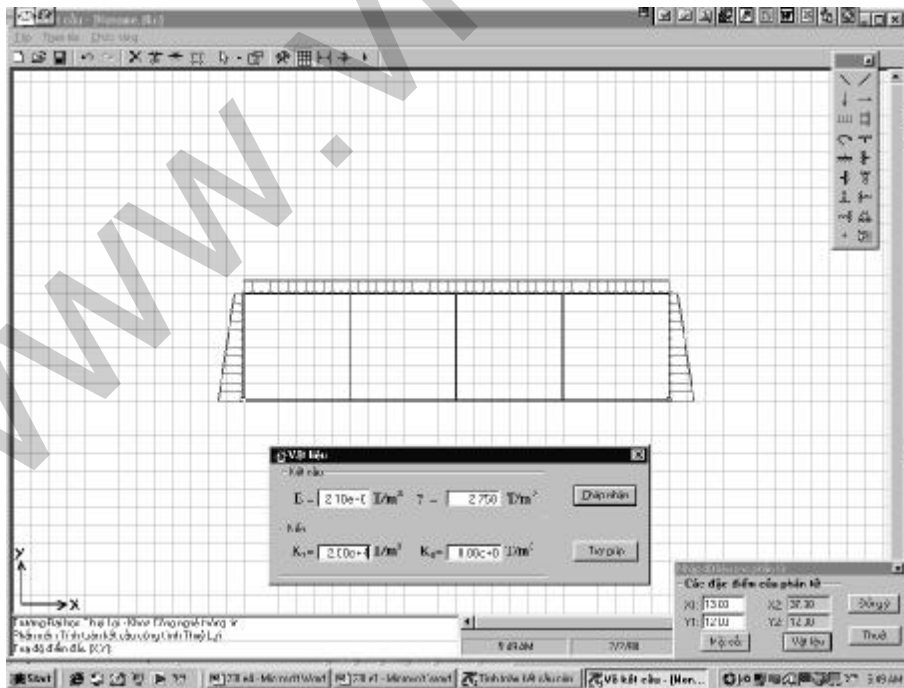
Chứa các lệnh tự động phân chia kết cấu thành các phần tử, tự động đánh số mã nút, mã phần tử, thiết lập ma trận cứng phần tử, vectơ tải phần tử, ma trận cứng kết cấu, vectơ tải kết cấu, thay trị các chuyển vị tại vị trí các nút có liên kết vào hệ phương trình (2.11.16).

c. Khối giải hệ phương trình

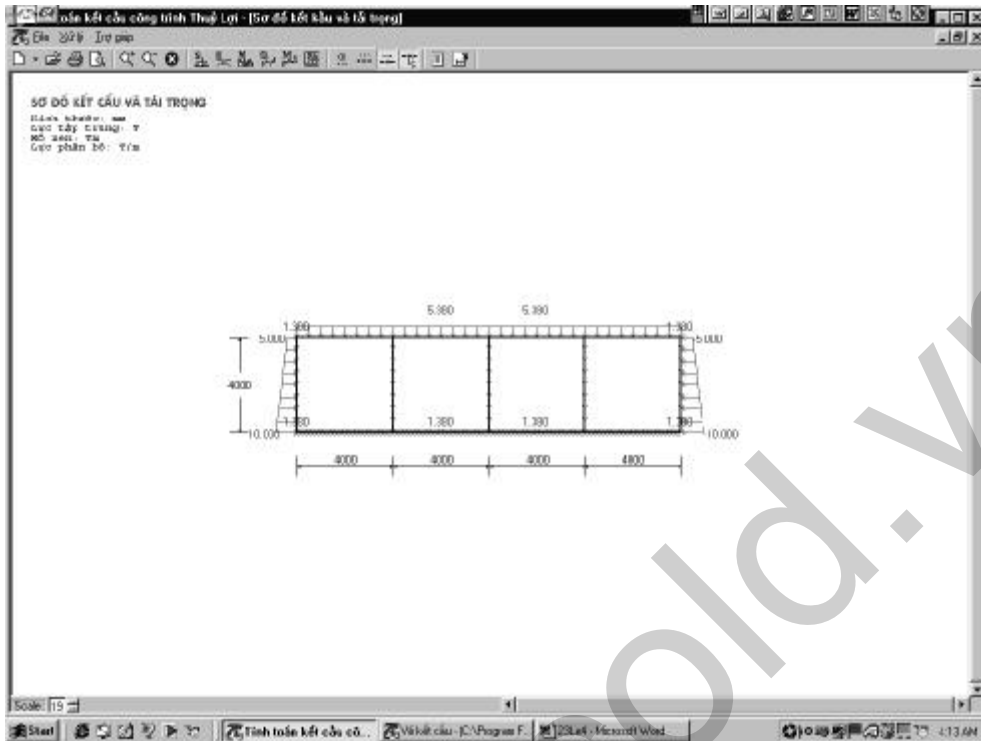
Chứa các lệnh giải hệ phương trình đại số tuyến tính (2.11.16) để tìm chuyển vị tại các nút, sau đó tính ứng suất hoặc nội lực tại các nút từ các chuyển vị đó. Thông thường, để giải hệ phương trình (2.11.16) các phần mềm tính kết cấu bằng phương pháp PTHH sử dụng phương pháp Gao-xơ (Gauss) hoặc phương pháp Sô-le-xơ-ki (Choleski). Vì dung lượng bộ nhớ trong của máy tính (RAM) có hạn nên để giải các hệ phương trình có số ẩn lớn khi giải còn chia ma trận K thành nhiều khối, lần lượt đưa từng khối vào bộ nhớ trong để giải còn các khối khác chứa ở bộ nhớ ngoài (đĩa từ), kết quả giải từng khối cũng được đưa ra đĩa từ.

d. Khối biểu diễn kết quả

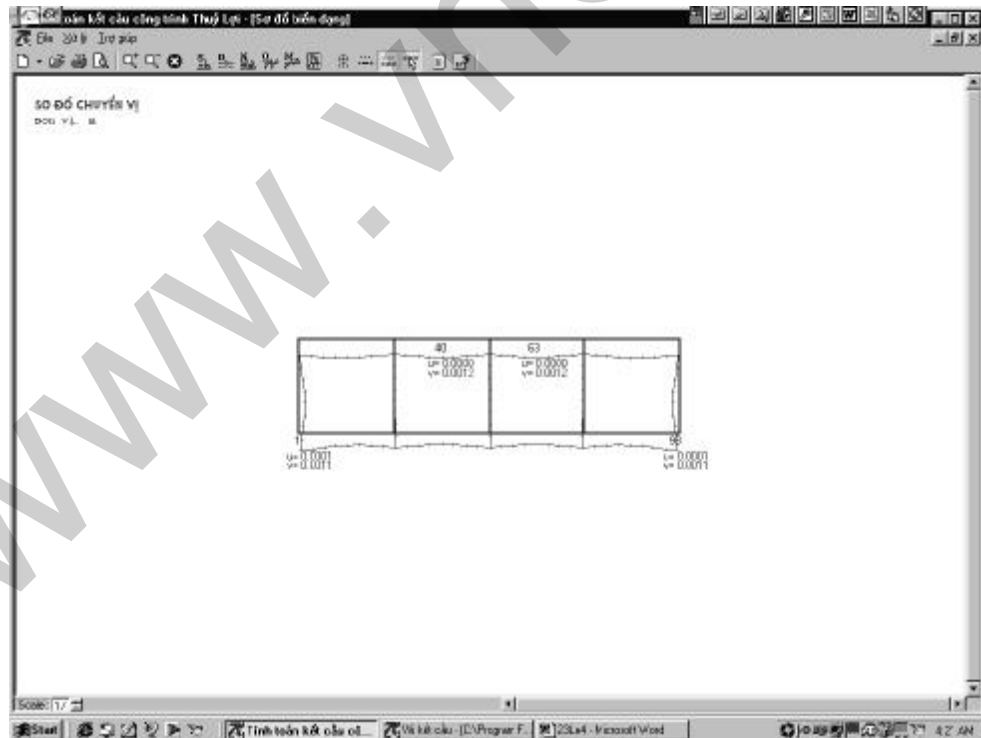
Chứa các lệnh hiện thị kết quả tính toán ở dạng đồ họa, ví dụ vẽ lại sơ đồ kết cấu và tải trọng (hình 2.11.5), dùng kết quả tính chuyển vị để vẽ sơ đồ kết cấu sau khi biến dạng (hình 2.11.6), dùng kết quả tính nội lực để vẽ biểu đồ nội lực (hình 2.11.7). Với kết cấu tấm, vỏ, khối hoặc kết cấu được đưa về giải ở dạng bài toán phẳng các phần mềm thường biểu diễn các vùng giá trị của nội lực hoặc ứng suất qua các giải màu. Mỗi giải màu ứng với một miền giá trị của nội lực hoặc ứng suất (hình 2.11.8).



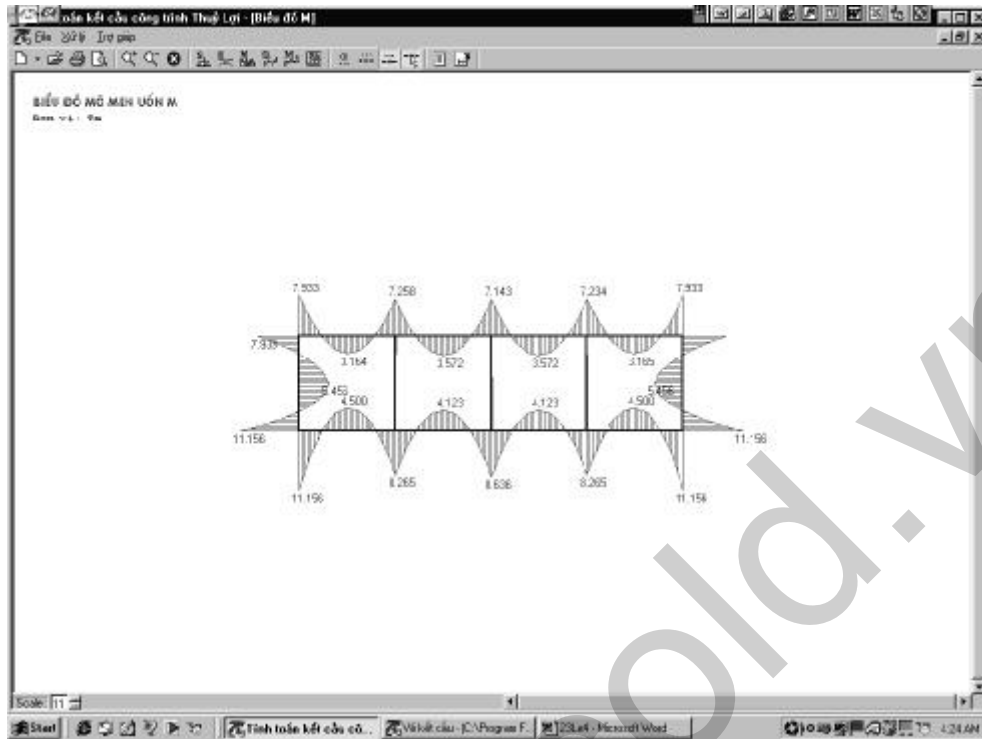
Hình 2.11.4: Cửa sổ dùng để thao tác vẽ kết cấu và nhập các hằng số vật liệu



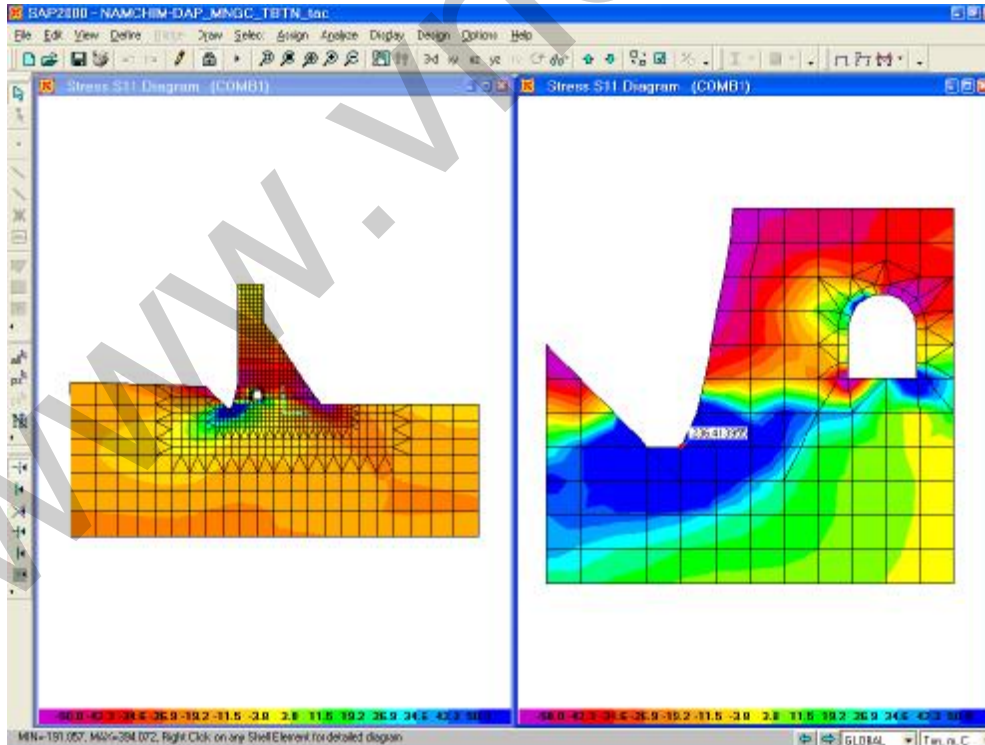
Hình 2.11.5: Sơ đồ kết cấu và tải trọng



Hình 2.11.6: Sơ đồ kết cấu sau biến dạng



Hình 2.11.7: Biểu đồ mô men

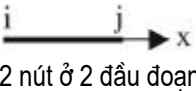
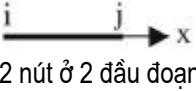


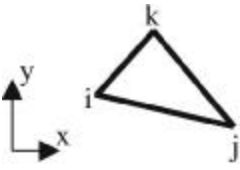
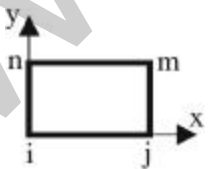
Hình 2.11.8: Các giải màu biểu thị các vùng giá trị ứng suất max của đập

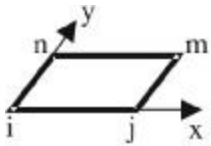
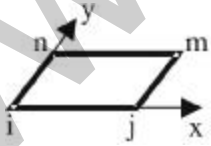
2.11.3. Dạng phần tử và hàm xấp xỉ chuyển vị ứng với một số dạng kết cấu

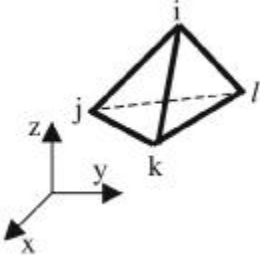
Trong bảng 2.11.1 trình bày một số dạng phần tử thường dùng trong tính toán kết cấu hệ thanh, bài toán phẳng, tấm, vỏ, dạng khối và hàm xấp xỉ tương ứng.

Bảng 2.11.1: Dạng phần tử và hàm xấp xỉ ứng với một số dạng kết cấu

Trường hợp	Dạng phần tử và hệ tọa độ cục bộ	Hàm xấp xỉ chuyển vị
Hệ thanh phẳng	 <p>2 nút ở 2 đầu đoạn</p>	<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 20px; margin-bottom: 5px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 200px; height: 20px; margin-bottom: 5px;"></div> <p>Vectơ chuyển vị:</p> <div style="border: 1px solid black; width: 80px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> x </div> <p>Ma trận P:</p> <div style="border: 1px solid black; width: 200px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> x </div> <p>Vectơ hệ số a:</p> <div style="border: 1px solid black; width: 200px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> x </div> <p>Chuyển vị ở 1 nút: u theo phương trục x; v theo phương trục y; góc xoay θ quanh trục z.</p> <p>Cấp ma trận cứng phần tử K_e: 6</p>
Thanh chịu xoắn	 <p>2 nút ở 2 đầu đoạn</p>	<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 20px; margin-bottom: 5px;"></div> <p>Ma trận P:</p> <div style="border: 1px solid black; width: 80px; height: 20px; margin-bottom: 5px;"></div> <p>Vectơ hệ số a:</p> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> x </div> <p>Chuyển vị ở 1 nút: góc xoắn quanh trục x</p> <p>Cấp ma trận cứng phần tử K_e: 4</p>

Trường hợp	Dạng phần tử và hệ tọa độ cục bộ	Hàm xấp xỉ chuyển vị
Bài toán phẳng	 <p>3 nút ở 3 đỉnh</p>	<div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> <div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> Vectơ chuyển vị: <input style="width: 100px;" type="text"/> Ma trận P: <input style="width: 100px;" type="text"/> Vectơ hệ số a: <input style="width: 100px;" type="text"/> Chuyển vị ở 1 nút: u theo phương trục x; v theo phương trục y. Cấp ma trận cứng phần tử K_e : 6
Bài toán phẳng	 <p>4 nút ở 4 đỉnh</p>	<div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> <div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> Vectơ chuyển vị: <input style="width: 100px;" type="text"/> Ma trận P: <input style="width: 100px;" type="text"/> Vectơ hệ số a: <input style="width: 100px;" type="text"/> Chuyển vị ở 1 nút: u theo phương trục x; v theo phương trục y Cấp ma trận cứng phần tử K_e : 8

Trường hợp	Dạng phần tử và hệ tọa độ cục bộ	Hàm xấp xỉ chuyển vị
<p>Tám chịu uốn</p>	 <p>4 nút ở 4 đỉnh</p>	<div style="border: 1px solid black; height: 60px; margin-bottom: 10px;"></div> <p>Ma trận P:</p> <div style="border: 1px solid black; height: 50px; margin-bottom: 10px;"></div> <p>Vectơ hệ số a:</p> <div style="border: 1px solid black; height: 20px; margin-bottom: 10px;"></div> <p>Chuyển vị ở 1 nút: độ võng w, góc xoay θ_x quanh trục x; góc xoay θ_y quanh trục y.</p> <p>Cấp ma trận cứng phần tử K_e: 12</p>
<p>Vô</p>	 <p>4 nút ở 4 đỉnh</p>	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; margin-bottom: 5px;"></div> <div style="border: 1px solid black; height: 20px; margin-bottom: 10px;"></div> <div style="border: 1px solid black; height: 100px; margin-bottom: 10px;"></div> <p>Vectơ chuyển vị:</p> <div style="border: 1px solid black; height: 20px; margin-bottom: 10px;"></div> <p>Ma trận P:</p> <div style="border: 1px solid black; height: 60px; margin-bottom: 10px;"></div> <p>Vectơ hệ số a:</p> <div style="border: 1px solid black; height: 20px; margin-bottom: 10px;"></div> <p>Chuyển vị ở 1 nút: độ võng w; góc xoay θ_x quanh trục x; góc xoay θ_y quanh trục y.</p> <p>Cấp ma trận cứng phần tử K_e: 20</p>

Trường hợp	Dạng phần tử và hệ tọa độ cục bộ	Hàm xấp xỉ chuyển vị
Khối	 <p>4 nút ở 4 đỉnh</p>	<div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> <div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> <div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> <p>Vectơ chuyển vị:</p> <div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> <p>Ma trận P:</p> <div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> <p>Vectơ hệ số a:</p> <div style="margin-bottom: 10px;"><input type="text"/></div> <p>Chuyển vị ở 1 nút: u theo phương trục x; v theo phương trục y; w theo phương trục z.</p> <p>Cấp ma trận cứng phần tử K_e: 12</p>

Chú ý là ứng với mỗi phần tử tùy theo bậc của đa thức nguyên được chọn sẽ phải có số chuyển vị nút tương ứng đủ để biểu diễn các hệ số của đa thức qua các chuyển vị đó. Cụ thể là đa thức nguyên có bao nhiêu số hạng thì phải có bấy nhiêu thành phần chuyển vị nút phần tử. Thông thường, các chuyển vị nút phần tử được xếp thành từng nhóm theo mỗi nút và phải giữ thứ tự đó như nhau ở các nút. Với phần tử thanh, thứ tự các nút thường lấy từ trái sang phải, với các phần tử phẳng (tam giác, tứ giác) thường lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, với phần tử khối thường lấy các nút từ đỉnh xuống đáy. Vì trong bảng không đủ chỗ để viết tất cả các thành phần chuyển vị nút của phần tử nên chỉ viết nhóm chuyển vị nút ở một nút theo thứ tự sắp xếp các chuyển vị nút ở nút đó. Nhóm chuyển vị và sắp xếp này có dạng như nhau ở tất cả các nút của phần tử.

Ở đây không đưa vào dạng cụ thể của ma trận cứng phần tử. Độc giả cần có thể xem trong tài liệu tham khảo trình bày ở cuối chương.

Cũng nói thêm là, ngày nay một số phần mềm dùng trong Toán học, ví dụ MATLAB, cho phép lấy đạo hàm và tích phân một hàm và trả kết quả ở dạng hàm. Do vậy, nếu biết dạng của đa thức xấp xỉ thì dùng các phần mềm đó có thể rút ra biểu thức tính các phần tử của ma trận cứng phần tử sau khi thay đa thức xấp xỉ vào công thức (2.11.12) tính K_e .

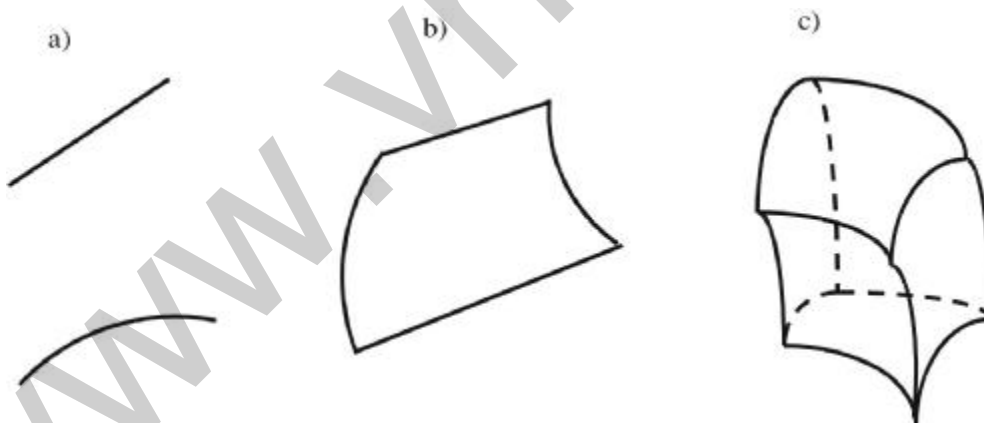
Ghi chú:

- a. Ngoài các phần tử có dạng hình học đơn giản liệt kê ở trên trong nhiều phần mềm còn sử dụng các phần tử đẳng thông số, đó là các phần tử thanh dạng thẳng hoặc cong (hình 2.11.9 a), phần tử tam giác hoặc tứ giác có cạnh là đoạn thẳng hoặc cong (hình 2.11.9 b) và phần tử khối chóp hoặc khối lăng trụ có giao tuyến của các mặt là đoạn thẳng hoặc cong (hình 2.11.9 c).

Sở dĩ gọi là phần tử đẳng thông số là vì hàm xấp xỉ dạng trục của thanh (phần tử thanh), dạng đường của các cạnh (phần tử phẳng) và dạng giao tuyến của các mặt (phần tử khối) biểu diễn qua tọa độ của các nút có cùng dạng với hàm xấp xỉ chuyển vị trong phạm vi phần tử biểu diễn qua chuyển vị tại các nút. Ví dụ, với phần tử phẳng (hình 2.11.9 b) hàm xấp xỉ tọa độ x, y của cạnh và chuyển vị u, v trong phạm vi phần tử được biểu diễn ở dạng:



trong đó: h_i là đa thức xấp xỉ.



Hình 2.11.9: Phần tử đẳng thông số

Ưu điểm của dạng phần tử này là có khả năng xấp xỉ rất sát dạng trục thanh, dạng của đường biên hoặc mặt biên có dạng bất kỳ và cho kết quả tính toán với độ chính xác cao mà chỉ phải dùng một số ít phần tử, ít hơn nhiều so với việc sử dụng dạng phần tử đơn giản để đạt cùng một độ chính xác. Song so với các phần tử có dạng hình học đơn giản thì xây dựng công thức tính toán ma trận cứng phần tử, vectơ tải phần tử... phức tạp hơn nhiều.

- b. Với kết cấu hệ thanh, kết cấu vỏ hoặc kết cấu khối, để thuận lợi cho việc thiết lập ma trận cứng phần tử thường chọn một hệ tọa độ cục bộ ứng với từng phần tử như ở các hình trong bảng 2.11.1. Vì hệ tọa độ này thường có các trục không song song với phương các trục của hệ tọa độ toàn thể nên trước khi ghép ma trận cứng phần tử vào ma trận cứng kết cấu phải sử dụng phép biến đổi tọa độ để đưa các ma trận cứng phần tử xác định trong hệ tọa độ cục bộ về ma trận cứng phần tử xác định trong hệ tọa độ toàn thể bằng công thức:

$$T_c = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

trong đó T_c là ma trận biến đổi tọa độ, các phần tử của nó chứa cosin chỉ phương của hệ tọa độ cục bộ trong hệ tọa độ toàn thể.

Ví dụ, với phần tử thanh dầm để tính khung phẳng như vẽ trong bảng 2.11.1, nếu các trục của hệ tọa độ cục bộ hợp với các trục của hệ tọa độ toàn thể một góc α thì ma trận biến đổi tọa độ có dạng:



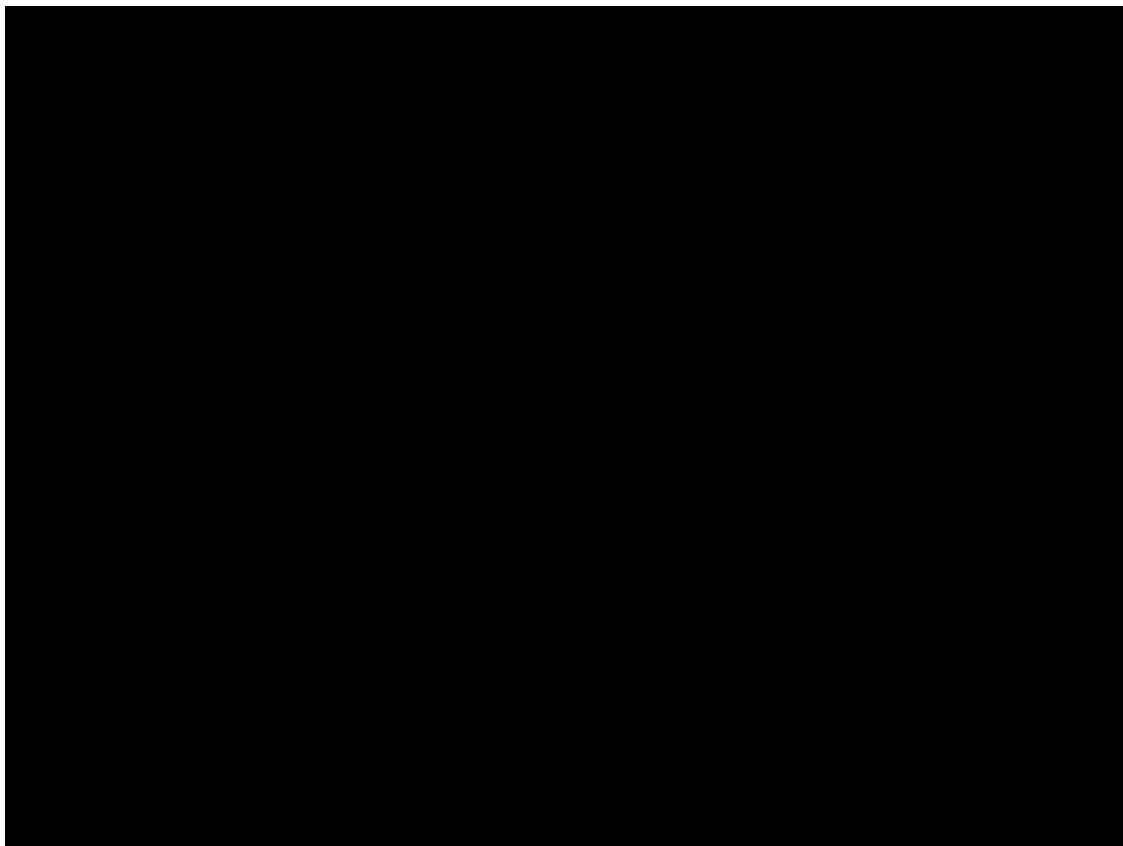
2.11.4. Tính kết cấu cùng làm việc với nền

1. Sử dụng mô hình nửa không gian vô hạn

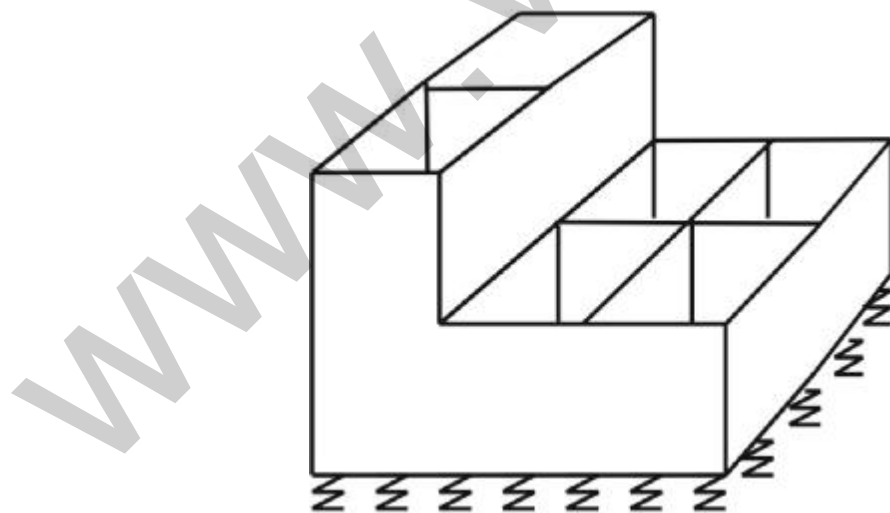
Thường áp dụng khi tính đập trọng lực, đập đất, đá, đường hầm... Vùng nền cùng làm việc với kết cấu được lấy với kích thước đủ lớn sao cho ở trên biên đứng của nền có thể coi chuyển vị ngang bằng 0 và trên biên ngang của nền có thể coi chuyển vị đứng bằng 0 (hình 2.11.10). Coi vùng nền là một bộ phận của kết cấu với điều kiện liên tục về chuyển vị ở các điểm nút trên biên tiếp giáp giữa kết cấu và nền. Với cách làm này ma trận cứng của hệ kết cấu - nền sẽ bằng tổng của ma trận cứng kết cấu và ma trận cứng của nền.

2. Sử dụng mô hình nền Uyn-cờ-le

Thường áp dụng khi tính kết cấu thanh, tấm hoặc vỏ. Đưa lò xo vào các nút trên biên tiếp xúc (hình 2.11.10) thông qua giá trị của hệ số nền ứng với loại đất hoặc đá của vùng nền cùng chịu lực với kết cấu. Khi tính ma trận cứng độ cứng của lò xo sẽ được đưa vào ma trận cứng của kết cấu.



Hình 2.11.10: Sơ đồ tính đập cùng làm việc với nền



Hình 2.11.11: Tính đập dạng kết cấu vỏ gáp cùng làm việc với nền

2.11.5. Tính kết cấu dàn hồi phi tuyến

Về mặt hình thức, với vật liệu dàn hồi phi tuyến quan hệ giữa ứng suất và biến dạng có thể biểu diễn bằng biểu thức tương tự với biểu thức (2.11.2) như ở vật liệu dàn hồi tuyến tính. Điểm khác nhau là ở vật liệu dàn hồi tuyến tính ma trận D có các phần tử là hằng số còn ở vật liệu dàn hồi phi tuyến các phần tử của ma trận D là hàm phụ thuộc vào ứng suất. Do vậy với bài toán dàn hồi phi tuyến không thể tính đúng ngay được ứng suất như ở bài toán dàn hồi tuyến tính mà phải tính đúng dần bằng phương pháp lặp, trong đó phương pháp thường dùng là phương pháp tuyến tính từng bước. Nội dung của các bước giải có thể tóm tắt như sau:

- a. Chia tải trọng thành nhiều cấp.
- b. Ở cấp đầu tiên coi vật liệu là dàn hồi tuyến tính. Ma trận dàn hồi D của vật liệu được xác định với giá trị ban đầu của các hằng số của vật liệu. Dùng ma trận này để xác định ma trận cứng K_c của từng phần tử và ma trận cứng K của kết cấu, giải hệ phương trình (2.11.16) tìm chuyển vị và tính ứng suất ở từng phần tử. Tiếp đó, căn cứ vào giá trị ứng suất vừa tính xác định lại các trị của hằng số dàn hồi theo (2.6.75) và (2.6.76), ma trận cứng K_c của từng phần tử theo (2.11.12) và ma trận cứng K của kết cấu theo (2.11.14), cứ làm như vậy cho đến khi ứng suất xác định được có sai số so với ứng suất ở bước lặp trước nằm trong phạm vi cho phép.
- c. Chuyển sang cấp tải trọng sau. Ở bước lặp đầu tiên lấy ma trận dàn hồi của vật liệu ứng với bước lặp cuối cùng của cấp tải trọng trước và thực hiện như ở bước 2. Cứ làm như vậy cho đến cấp tải trọng cuối cùng.

2.11.6. Tính kết cấu dàn dẻo

Tính kết cấu dàn dẻo cũng có thể thực hiện bằng phương pháp tuyến tính từng bước tương tự như tính kết cấu làm bằng vật liệu dàn hồi phi tuyến. Điểm khác nhau chỉ là trong mỗi bước lặp, sau khi tính được ứng suất ở mỗi phần tử phải dựa vào điều kiện dẻo để kiểm tra xem vật liệu ở phần tử đó đã bước vào giai đoạn chảy dẻo hay chưa. Nếu vật liệu đã bước vào giai đoạn chảy dẻo thì thay cho ma trận dàn hồi phải sử dụng ma trận dàn dẻo để tính lại ma trận K_c và ma trận K , sau đó giải lại hệ phương trình (2.11.16). Cứ làm như vậy cho đến khi ở bước lặp sau không có thêm phần tử vật liệu nào bước vào giai đoạn chảy dẻo thì chuyển sang cấp tải trọng sau.

Ngoài phương pháp tuyến tính từng bước khi tính kết cấu dàn dẻo bằng phương pháp PTHH còn hay sử dụng phương pháp ứng suất ban đầu. Nội dung của các bước giải có thể tóm tắt như sau:

- a. Chia tải trọng thành nhiều cấp.
- b. Ở mỗi cấp tải trọng và trong mỗi bước lặp lấy ma trận K ứng với vật liệu dàn hồi tuyến tính và tìm vectơ ứng suất σ_c ở mỗi phần tử theo (2.11.10) với D là ma trận dàn hồi, sau đó kiểm tra điều kiện dẻo ở mỗi phần tử. Nếu ở một phần tử nào đó

vật liệu bước vào giai đoạn chảy dẻo thì tính lại vectơ ứng suất σ_{dc} ở phần tử đó theo (2.11.10) với D_d là ma trận đàn dẻo. Chênh lệch ứng suất:

$$\Delta\sigma = \sigma_{dc} - \sigma_c$$

được coi như tải trọng phân bố trong phạm vi phần tử, được quy về tải trọng nút và cộng vào vectơ tải trọng nút để giải ở bước lặp sau. Cứ làm như vậy cho đến khi ở bước lặp sau không có thêm phần tử vật liệu nào bước vào giai đoạn chảy dẻo thì chuyển sang cấp tải trọng sau.

- c. Chuyển sang cấp tải trọng sau và thực hiện như ở bước 2. Cứ làm như vậy cho đến cấp tải trọng cuối cùng.

Khác nhau giữa hai phương pháp là sau mỗi bước lặp phương pháp tuyến tính từng bước thay đổi ma trận cứng K, giữ nguyên vectơ tải còn phương pháp ứng suất ban đầu thì giữ nguyên ma trận cứng K, thay đổi vectơ tải. Phương pháp tuyến tính từng bước đòi hỏi máy tính có dung lượng lớn hơn và tốc độ giải chậm hơn so với phương pháp ứng suất ban đầu.

2.11.7. Tính kết cấu chịu tải trọng động

1. Phương trình cơ bản

Phương trình cơ bản của phương pháp PTHH tính kết cấu chịu tải trọng động được viết ở dạng:

$$\boxed{\times} \quad (2.11.17)$$

trong đó:

K - ma trận cứng của kết cấu;

M - ma trận khối lượng của kết cấu. Các phần tử của ma trận là khối lượng vật liệu tập trung tại các nút của mạng lưới phần tử. Với công trình thủy lợi thường xuyên tiếp xúc với nước, khi xác định ma trận khối lượng phải tính thêm phần khối lượng nước cùng tham gia dao động với kết cấu;

C - ma trận cản được xác định bằng công thức:

$$\boxed{}$$

với α và β là hai hằng số được xác định từ hai hệ số cản tương ứng với hai tần số dao động khác nhau;

F - vectơ tải trọng nút được xác định từ tải trọng động tác dụng vào kết cấu. Đây là các lực kích thích tác dụng vào kết cấu trong suốt thời gian kết cấu dao động;

Δ - vectơ chuyển vị nút;

$\dot{\Delta}$ - vectơ tốc độ chuyển vị nút, $\boxed{\times}$;

$\ddot{\Delta}$ - vectơ gia tốc chuyển vị nút, $\boxed{\times}$.

Về thực chất phương trình (2.11.17) mô tả cân bằng lực của kết cấu chịu tải trọng động. So với phương trình (2.11.16) mô tả cân bằng lực của kết cấu chịu tải trọng tĩnh phương trình này có thêm hai thành phần:



- biểu diễn lực cản. Lực này thường được giả thiết tỷ lệ với vận tốc dao động.



- biểu diễn lực quán tính.

Với kết cấu chịu tải trọng động thường quan tâm đến hai lời giải sau:

- Tần số dao động riêng của kết cấu. Đại lượng này được sử dụng để đánh giá xem dưới tác dụng của tải trọng động ứng với một tần số nào đó có xảy ra cộng hưởng dẫn đến phá hoại kết cấu hay không.
- Chuyển vị và nội lực của kết cấu tại thời điểm bất kỳ dưới tác dụng của tải trọng động.

2. Tần số dao động riêng của kết cấu

Với kết cấu chịu tải trọng là lực kích thích có chu kỳ, ví dụ động đất hoặc rung động của động cơ..., để xem kết cấu có bị cộng hưởng hay không thường phải xác định tần số dao động riêng của kết cấu.

Dao động riêng là dao động sinh ra dưới tác dụng của một lực kích thích tức thời tại thời điểm ban đầu. Trong môi trường không có lực cản dao động này có dạng là dao động điều hòa:



trong đó: ω là tần số dao động riêng.

Trong trường hợp không có lực cản và lực kích thích thường xuyên (= $F = 0$), thay biểu thức vào phương trình (2.11.17) được:



(2.11.18)

Hệ phương trình này có nghiệm khi định thức của ma trận:



(2.11.19)

Về mặt toán học (2.11.19) là phương trình tìm trị riêng của ma trận. Giải (2.11.9) xác định được n trị riêng của ma trận cũng chính là n tần số riêng của dao động ứng với n khối lượng tập trung của mạng lưới phân tử. Mỗi tần số ứng với một dạng dao động tự do của kết cấu được gọi là dạng dao động riêng. Các tần số được ký hiệu từ nhỏ đến lớn lần lượt là $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$. Trong thực tế công trình thường chỉ quan tâm đến những tần số dao động riêng có giá trị nhỏ. Các tần số này được gọi là các tần số cơ bản. Phần mềm SAP 2000 cho phép xác định tối đa 10 tần số dao động riêng cơ bản và dạng dao động riêng ứng với các tần số đó.

3. Tính chuyển vị và ứng suất gây ra bởi tải trọng động

Về nguyên tắc, giải hệ phương trình vi phân (2.11.17) với điều kiện biên và điều kiện ban đầu đã biết sẽ xác định được chuyển vị và ứng suất tại thời điểm t bất kỳ. Hiện có nhiều phương pháp giải, trong đó phương pháp Niu-măc (Newmark) được sử dụng phổ biến. Nội dung của phương pháp này có thể tóm tắt như sau:

- + Chia thời gian tính toán làm n thời đoạn với độ dài mỗi thời đoạn là Δt .
- + Cuối mỗi thời đoạn $t + \Delta t$ tính tốc độ chuyển vị và chuyển vị bằng công thức nội suy:

(2.11.20)

trong đó: α và δ là hai thông số được lựa chọn để thỏa mãn độ chính xác và ổn định của lời giải, ví dụ lấy

- + Từ (2.11.20) rút ra công thức tính \dot{u} và u qua \ddot{u} , sau đó thay vào phương trình (2.11.17) viết cho thời điểm $t + \Delta t$:

được hệ phương trình chỉ chứa ẩn \ddot{u} .

- + Giải hệ phương trình này xác định được chuyển vị u tại thời điểm $t + \Delta t$.
- + Thay u vào (2.6.10) xác định được ứng suất tại thời điểm $t + \Delta t$.

Chú ý là giá trị của thời đoạn Δt lựa chọn có ảnh hưởng đến ổn định và độ chính xác của phép giải lặp. Theo nghiên cứu, để đảm bảo ổn định của phép tính nên lấy Δt khoảng bằng $\frac{1}{10} T_n$ hoặc tốt nhất là khoảng $\frac{1}{20} T_n$, trong đó T_n là chu kỳ nhỏ nhất, còn T_p là chu kỳ ứng với tần số nhỏ nhất của dao động. Còn để đảm bảo độ chính xác của kết quả thì tỷ số $\frac{\Delta t}{T}$ phải lấy nhỏ hơn 0,01, trong đó T là chu kỳ của dao động.

2.12. THỰC NGHIỆM KẾT CẤU CÔNG TRÌNH

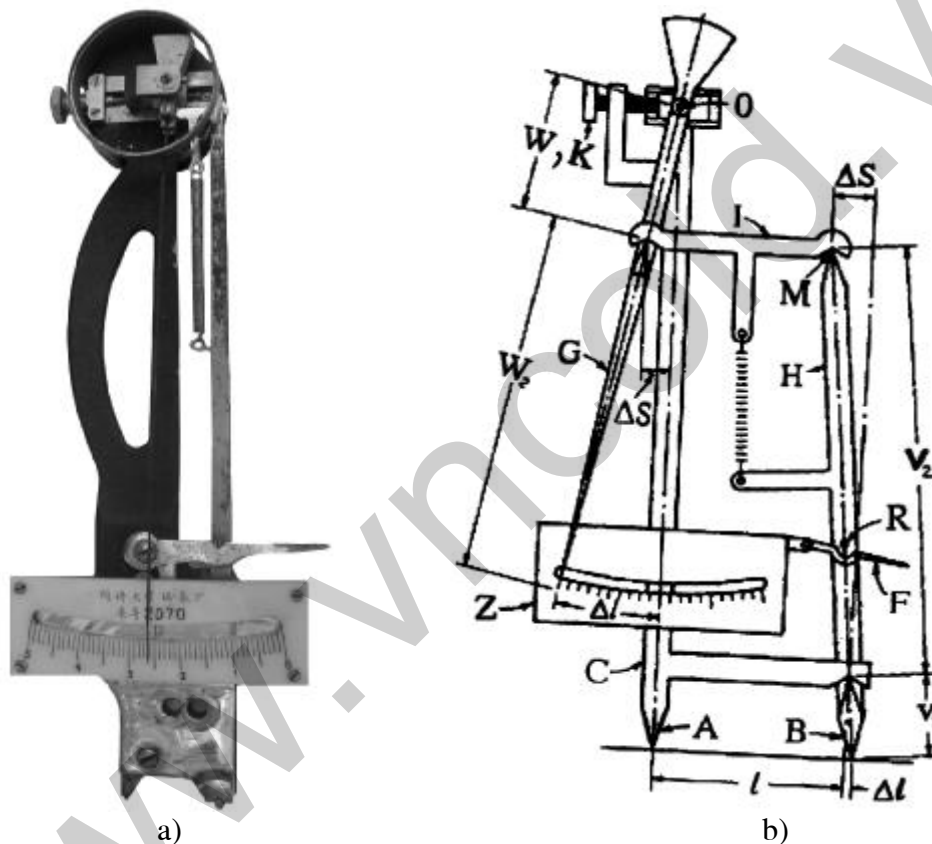
Nhiệm vụ chính của thực nghiệm kết cấu công trình là xác định ứng suất và chuyển vị bằng các dụng cụ đo. Thông thường, để xác định ứng suất trong công trình, trong mô hình hoặc trong mẫu thí nghiệm phải đo biến dạng, sau đó dựa vào định luật Húc (Hook) để tìm ra ứng suất. Dưới đây giới thiệu một số phương pháp và dụng cụ đo biến dạng và chuyển vị thường sử dụng.

2.12.1. Nguyên lý và dụng cụ đo biến dạng

Có rất nhiều phương pháp đo biến dạng, song dưới đây chỉ trình bày một số phương pháp cơ bản và thông dụng nhất.

2.12.1.1. Đo biến dạng dựa trên nguyên lý cơ học

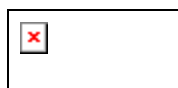
Dụng cụ để đo biến dạng gọi là ten-sơ-met, thông dụng nhất là ten-sơ-met kiểu đòn bẩy. Cấu tạo của ten-sơ-met này như trên hình 2.12.1 a và sơ đồ nguyên lý như trên hình 2.12.1 b.



Hình 2.12.1: Ten-sơ-met kiểu đòn bẩy

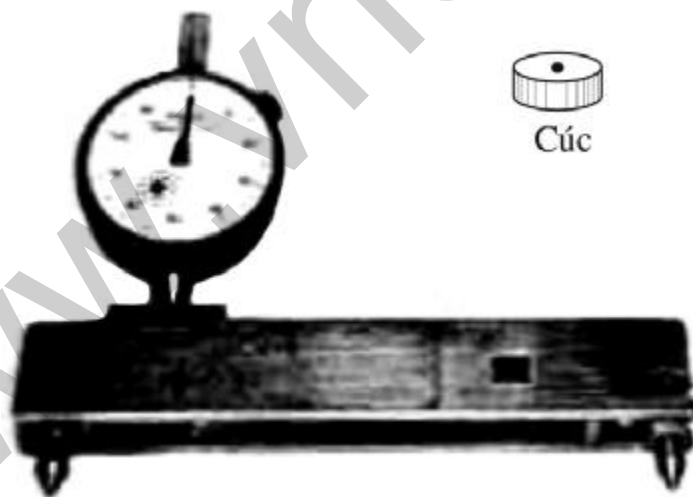
Trên khung (1) của ten-sơ-met có một lưỡi dao cố định và một lưỡi dao động (2) hình quả trám tì lên khung (1). Khoảng cách giữa hai lưỡi dao này gọi là chuẩn đo (ba-zơ) của dụng cụ. Lưỡi dao (2) được nối với tay đòn (3). Ngoài ra còn có kim chỉ thị (4) và bảng chia độ (5). Để đo biến dạng của mẫu ta dùng bộ gá lắp gắn chặt 2 lưỡi dao của ten-sơ-met vào mẫu tại vị trí đo. Khi mẫu thí nghiệm bị biến dạng thì khoảng cách giữa 2 lưỡi dao cũng bị thay đổi, lưỡi dao (2) quay làm thanh (3) quay theo (đường nét đứt trên hình 2.12.1 b) đẩy kim (4) quay trên mặt chia độ (5). Nhờ hệ thống đòn bẩy, biến dạng dài (sự thay đổi độ dài của khoảng cách giữa 2 lưỡi dao) được khuếch đại

lên K lần. K gọi là hệ số khuếch đại của ten-sơ-met (thông thường $K = 1000$). Như vậy hiệu số δ đọc được trên bảng chia độ trước và sau khi mẫu bị biến dạng cho ta biến dạng dài Δl của đoạn l của mẫu đã được nhân lên K lần. Do đó biến dạng dài tương đối của mẫu được tính:



Ưu điểm của loại ten-sơ-met này là đơn giản, dễ sử dụng, ít chịu ảnh hưởng của môi trường. Tuy nhiên độ nhạy của dụng cụ này thấp nên độ chính xác không cao. Quán tính của dụng cụ lớn nên không sử dụng để đo biến dạng động. Ngoài ra độ chính xác khi đo còn phụ thuộc rất lớn vào kỹ thuật gá lắp dụng cụ vào mẫu thí nghiệm, tức là phụ thuộc vào trình độ tay nghề của cán bộ thí nghiệm. Khi muốn đo biến dạng tại nhiều điểm thì phải sử dụng nhiều ten-sơ-met.

Một loại dụng cụ khác nhưng cũng dựa trên nguyên lý này là Đì-mêch (Demec). Sơ đồ của dụng cụ này cho trên hình 2.12.2. Về cơ bản cấu tạo của nó cũng tương tự như ten-sơ-met đòn bẩy, chỉ khác là bộ chỉ thị ở đây là một chuyển vị kế (cấu tạo của chuyển vị kế sẽ được trình bày ở phần dưới). Khung của Đì-mêch được làm bằng một loại kim loại (thường là thép in-va) có độ dẫn nở vì nhiệt vô cùng nhỏ để khử ảnh hưởng của môi trường.



Hình 2.12.2: Dụng cụ đo Đì-mêch

Muốn đo biến dạng của mẫu tại vị trí nào đó ta chỉ việc dán 2 chiếc "cúc" vào vị trí cần đo. Hai cúc này đặt cách nhau một khoảng xấp xỉ chuẩn đo của dụng cụ (khoảng cách của các cúc này được định vị bằng một dụng cụ riêng kèm theo). Để đo biến dạng của mẫu ta chỉ việc cắm 2 lưỡi dao của Đì-mêch vào 2 lỗ của 2 cúc đã dán sẵn trên mẫu thí nghiệm trước và sau khi mẫu bị biến dạng. Hiệu số 2 lần đọc này chính là biến dạng

tuyệt đối Δl của đoạn dài giữa 2 cúc đã dán sẵn trên mẫu đã được nhân lên K lần. K được gọi là hệ số khuếch đại của Đì-mêch. Biết Δl , l và hệ số K của Đì-mêch dễ dàng xác định được biến dạng tương đối ε của mẫu. Với cách đo như trên, chỉ cần một Đì-mêch có thể đo biến dạng tại nhiều vị trí khác nhau trên công trình và cũng có thể đo biến dạng của mẫu nhiều lần ở nhiều thời điểm khác nhau (đo biến dạng theo thời gian). Ngoài ra, với dụng cụ này, kết quả đo không phụ thuộc vào kỹ thuật gá lắp dụng cụ. Do mở rộng được chuẩn đo nên độ nhạy tăng. Tuy nhiên dụng cụ này cũng có quán tính lớn nên chỉ đo được biến dạng tĩnh.

2.12.1.2. Đo biến dạng bằng tấm điện trở

Đây là phương pháp đo biến dạng dài được dùng phổ biến hiện nay. Phương pháp này có nhiều ưu điểm mà các phương pháp cơ học không thể có được. Đó là:

- Có độ chính xác cao.
- Chỉ cần một máy đo có thể đo biến dạng tại nhiều vị trí trên công trình.
- Có thể đo biến dạng theo nhiều phương khác nhau tại cùng một điểm và do đó có thể xác định được giá trị, phương của ứng suất chính.
- Có thể đo biến dạng gây ra do tải trọng tĩnh, tải trọng dao động cũng như tải trọng xung.
- Có thể đo biến dạng ở khoảng cách xa vị trí đặt máy đo, ở những vị trí kín không thể quan sát được, ví dụ đo biến dạng ở những điểm trong lòng cấu kiện bê tông, kết cấu chìm trong nước, ngầm trong đất...
- Có thể sử dụng tấm điện trở để chế tạo thành các đầu chuyển đổi để đo nhiều đại lượng cơ học khác.

Tuy vậy, phương pháp đo này cũng có nhược điểm là chịu ảnh hưởng khá nhiều của môi trường như nhiệt độ, độ ẩm, từ trường... nên cần có biện pháp kỹ thuật xử lý thích hợp mới thu được kết quả tin cậy.

Để sử dụng phương pháp đo này cần tấm điện trở (còn gọi là dat-tric điện trở hoặc cảm biến điện trở...) và thiết bị đo.

Cấu tạo của tấm điện trở gồm vỏ bằng giấy cách điện hoặc bằng po-ly-es-te và một dây điện trở được dán chặt giữa 2 lớp vỏ (hình 2.12.4). Chiều dài l được gọi là chuẩn đo. Điện trở của tấm thường có giá trị là 120, 350, 600 Ω đến 2000 Ω . Chuẩn đo thường là 5, 10, 20, 50 mm...

Muốn đo biến dạng dài của mẫu thí nghiệm theo phương nào đó, ta chỉ việc dùng keo chuyên dùng dán tấm điện trở lên mẫu theo phương đó. Khi mẫu bị biến dạng chiều dài dây điện trở bị thay đổi, dẫn đến điện trở của nó cũng bị thay đổi theo. Biết điện trở R của dây dẫn được xác định bằng công thức sau:



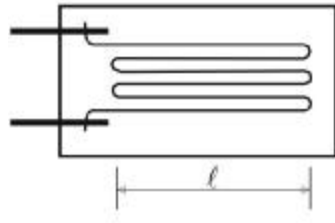
(a)

trong đó:

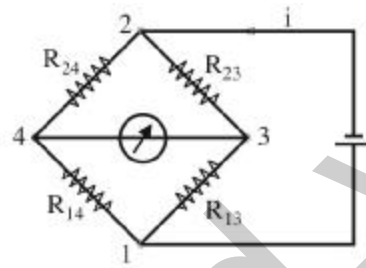
ρ - điện trở suất của vật liệu làm dây dẫn;

l - chiều dài dây dẫn;

F - diện tích mặt cắt ngang của dây dẫn.



Hình 2.12.4: Tấm điện trở



Hình 2.12.5: Cầu đo

Từ (a) có :

$$\ln R = \ln \rho + \ln l - \ln F$$

Suy ra biến đổi tương đối của điện trở:

(b)

Ở vế phải, số hạng thứ nhất là thay đổi của điện trở suất, số hạng thứ hai là độ dẫn dài tương đối ϵ của dây điện trở, số hạng thứ ba là biến dạng tương đối của diện tích dây.

Vì

trong đó: μ là hệ số Poat-xông.

Mà

Do đó, nếu bỏ qua sự thay đổi của điện trở suất thì từ (b) ta có:

(c)

trong đó K được gọi là hệ số nhạy của tấm điện trở. Vì với một loại dây điện trở $\mu = \text{const}$ nên $K = \text{const}$.

Từ (c) thấy thay đổi tương đối của điện trở tỉ lệ bậc nhất với biến dạng tương đối của chiều dài dây dẫn, do đó nếu đo được tỉ số $\Delta R/R$ thì sẽ xác định được biến dạng dài tương đối ϵ của dây điện trở, cũng chính là biến dạng dài tương đối của mẫu thí nghiệm.

Thiết bị đo thay đổi điện trở là một cầu đo điện trở, thông thường là cầu đo Uyn-ston (hình 2.12.5). Khi cầu cân bằng, tức là khi điện kế G chỉ số 0 thì ta có $V_A = V_C$ hay:

$$I_1 R_1 = I_2 R_3 \quad (*)$$

$$I_1 R_2 = I_2 R_4 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) có:



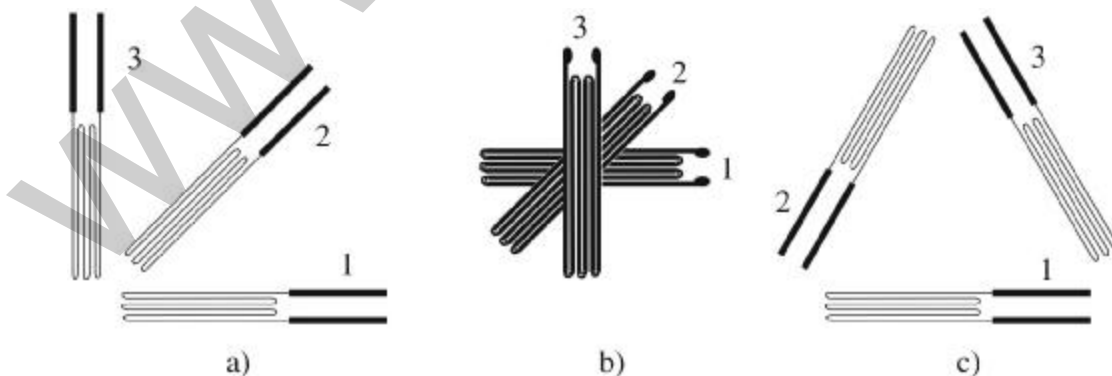
hay $R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (***)$

Nếu R_1 là đất-tríc đo biến dạng thì khi R_1 thay đổi một lượng ΔR_1 . Để cầu cân bằng phải thay đổi điện trở R_4 một lượng ΔR_4 . Biết ΔR_4 có thể xác định được ΔR_1 và do đó theo (c) có thể xác định được ϵ .

Vì biến dạng rất nhỏ nên thay đổi điện trở và điện thế cũng rất nhỏ. Để nhận biết được thay đổi trong thiết bị đo phải có một bộ khuếch đại tín hiệu điện. Máy đo tốt là máy có độ khuếch đại lớn và trong quá trình khuếch đại không làm méo tín hiệu.

Nếu mẫu thí nghiệm không thuộc trạng thái ứng suất đơn mà thuộc trạng thái ứng suất phẳng thì muốn đo được ứng suất chính phải đo biến dạng theo ba phương, rồi dựa vào công thức của trạng thái biến dạng để tính biến dạng chính. Để đo biến dạng theo 3 phương thường dùng các đất-tríc chuyên dụng gọi là hoa điện trở (hình 2.12.6).

Nếu đã biết phương chính ta thường dùng hoa điện trở vuông góc (hình 2.12.6 a). Các tấm điện trở được dán vuông góc với nhau và dán theo các phương chính. Các biến dạng đo được này chính là các biến dạng chính. Từ các biến dạng chính, nhờ định luật Húc (Hook) xác định được các ứng suất chính σ_{\max} , σ_{\min} .



Hình 2.12.6: Hoa điện trở

Nếu tại điểm cần đo chưa biết các phương chính thì phải đo biến dạng theo 3 phương khác nhau. Trong trường hợp đó dùng hoa điện trở 45^0 (hình 2.12.6 b) hay hoa điện trở 60^0 (hình 2.12.6 c). Giả sử ta dùng hoa điện trở 45^0 . Kí hiệu ε_0 , ε_{45} , ε_{90} lần lượt là các biến dạng đo được theo phương ngang, phương 45^0 và phương 90^0 so với phương ngang. Theo công thức của trạng thái biến dạng ta xác định được các biến dạng theo các phương chính ε_{\max} , ε_{\min} theo các công thức sau:

$$\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min} = \varepsilon_0 + \varepsilon_{90}$$

hoặc:

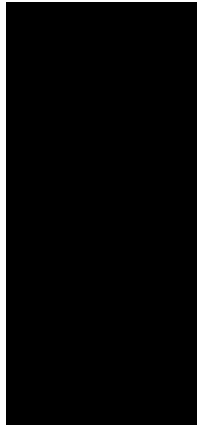
Góc giữa phương ε_{\max} và phương ε_0 là φ được xác định từ biểu thức:

Nếu dán các điện trở như trên hình 2.12.16 c ta có:

(2.12.1)

2.12.2. Đo chuyển vị bằng phương pháp cơ học

Dụng cụ để đo chuyển vị gọi là chuyển vị kế. Chuyển vị kế kiểu cơ học có sơ đồ như trên hình 2.12.7. Cấu tạo của nó gồm: Trục (1) trượt được trong ống (2). Đồng hồ chỉ thị (3) gồm một hệ thống bánh răng làm nhiệm vụ truyền chuyển động thẳng của trục (1) thành chuyển động quay của các kim trên mặt chia độ. Nhờ hệ thống bánh răng này mà chuyển dịch của trục (1) được khuếch đại lên K lần. K gọi là hệ số khuếch đại của chuyển vị kế. Muốn đo chuyển vị tại một điểm nào đó của kết cấu phải dùng một bộ gá để đặt đầu của trục (1) tiếp xúc với điểm đó. Bộ gá được kẹp chặt vào vỏ ống (2) và được đặt trên một vị trí cố định (không bị chuyển vị). Khi điểm đo có chuyển vị thì đầu của trục (1) dịch chuyển theo. Hiệu số đọc được trên đồng hồ khi mẫu đã chuyển vị và khi chưa chuyển vị cho chuyển vị của điểm đo. Các chuyển vị kế kiểu này thường có độ chính xác 0,01 mm (bách phân kế) hoặc 0,001 mm (thiên phân kế).



Hình 2.12.7: Chuyển vị kế

Chuyển vị kế loại này cho kết quả khá tin cậy và ít chịu ảnh hưởng của môi trường ngoài song có một số nhược điểm:

- Độ nhảy không cao.
- Muốn đo chuyển vị cần phải có điểm cố định để đặt bộ gá lắp.
- Mỗi chuyển vị kế chỉ đo được chuyển vị tại một điểm.
- Chuyển vị kiểu cơ học thuần túy (không có cầu đo bên trong) chỉ có thể sử dụng để đo chuyển vị tĩnh.

2.12.3. Đo một số đại lượng khác

Ngoài dụng cụ đo biến dạng và chuyển vị, còn nhiều loại dụng cụ đo để đo các đại lượng khác như: Đo áp lực (áp lực đất, áp lực nước), đo gia tốc, đo tần số, đo biên độ dao động v.v... Hầu hết các dụng cụ đo này đều được chế tạo dựa trên nguyên lý cảm ứng điện từ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. T. Đ. Châm, P. H. Giang, N. Khải, N.V. Lê
Giáo trình Sức bền vật liệu
NXB. Nông nghiệp, 1989.
2. H. Đ. Trí, Đ. H. Quang, L. T. Thành, D. V. Thứ, P. K. Thường
Giáo trình Cơ học kết cấu
NXB. Nông nghiệp, 1999.
3. P. H. Giang, P. N. Khánh, N. V. Lê
Giáo trình Lý thuyết đàn hồi
NXB. Nông nghiệp, 1993.
4. N. X. Bảo, P. H. Giang, V. T. Hải, N. V. Lê
Phương pháp phần tử hữu hạn
NXB. Nông nghiệp, 1984.
5. P. H. Giang
Phương pháp phần tử biên
NXB. Khoa học Kỹ thuật, 2002.
6. P. K. Hùng, Đ. T. Long, L. V. Mai
Ổn định và động lực học công trình
NXB. Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1974.
7. L. T. Trình, Đ. V. Bình
Ổn định công trình
NXB. Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội, 2002.
8. N. V. Cung (chủ biên), nnk.
Sổ tay kỹ thuật thủy lợi
NXB. Nông nghiệp.
9. Sổ tay thiết kế kết cấu thủy công (tiếng Trung)
NXB. Thủy lợi thủy điện, 1984.
10. Sổ tay thiết kế (tiếng Nga)
NXB. Xây dựng (Liên Xô cũ), 1979.
11. K.L. Bathe
Finite element Procedures in Engineering Analysis
Prentice Hall, Inc, 1982.
12. Trần Thắng Hoàn
Tính toán ổn định của mái dốc cao và nền phức tạp của đập cao (tiếng Trung)
NXB. Thủy lợi thủy điện (Trung Quốc), 2001.